Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Institut für Mathematische Optimierung
Prof. Dr. Friedrich Juhnke
Dr. Matthias Köppe, Gebäude 18, Raum 311

Wintersemester 2003/2004

6. Übungsblatt

Lineare Optimierung

`http://www.math.uni-magdeburg.de/~mkoeppe/lehre/opt1-2003`

Abgabe der Übungsaufgaben: bis Donnerstag, 27. November, zu Beginn der Übung

26. Aufgabe **(10 Punkte)**

Berlin hatte zu Beginn des Jahres 1996 für den Bau des Tiergartentunnels in den folgenden sechs Jahren Bedarf an Finanzierungsmitteln, und zwar

20 Mio. für das Jahr 1996,	17 Mio. für das Jahr 1997,	23 Mio. für das Jahr 1998,
24 Mio. für das Jahr 1999,	25 Mio. für das Jahr 2000,	21 Mio. für das Jahr 2001.

Die Mittel sollten über langfristige Anleihen beschafft werden. Anleihen können am 1. Januar jedes Jahres aufgenommen werden und müssen zum 31. Dezember 2001 zurückgezahlt werden, wobei die Verzinsung in der Rückzahlungssumme enthalten ist. Der Rückzahlungskurs beträgt für Anleihen

aus dem Jahr 1996: 150%,	aus dem Jahr 1997: 142%,	aus dem Jahr 1998: 132%,
aus dem Jahr 1999: 123%,	aus dem Jahr 2000: 115%,	aus dem Jahr 2001: 107%.

Die Stadtväter standen vor der Frage, wie die Volumina der sechs Anleihen aussehen sollen, da es ja möglicherweise günstig sein kann, Anleihen auf Vorrat aufzunehmen. In jedem Jahr können die nicht benötigten Mittel zu jeweils 6,9% Verzinsung angelegt werden.

a) Formulieren Sie das geschilderte Problem als Lineares Programm.

b) Wie sieht ein optimaler Finanzierungsplan aus? (Verwenden Sie `GLPK`.)

c) Leider wurden im Januar 1996 nur 20 Mio. als langfristige Anleihe aufgenommen. Um wieviel wird das gesamte Projekt dadurch teurer?

27. Aufgabe **(10 Punkte)**

Gegeben sei das folgende LP:

$$
\begin{array}{lrl}
\max & x_3 & \\
\text{s.t.} & x_1 & \geq \epsilon \\
& x_1 & \leq 1 \\
& -\epsilon x_1 + x_2 & \geq 0 \\
& \epsilon x_1 + x_2 & \leq 1 \\
& -\epsilon x_2 + x_3 & \geq 0 \\
& \epsilon x_2 + x_3 & \leq 1 \\
& x_1, x_2, x_3 & \geq 0
\end{array}
$$

Skizzieren Sie den zulässigen Bereich für $\epsilon = 0$ und $\epsilon = \frac{1}{4}$. (Dies ist ein „Klee-Minty-Würfel".)

28. Aufgabe **(10 Punkte)**

Die Lösung $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{16}$, $x_3 = \frac{1}{64}$ ist eine zulässige Basislösung für das LP aus der 27. Aufgabe mit $\epsilon = \frac{1}{4}$. Bringen Sie das LP in Standardform und bestimmen Sie das Simplextableau, das zu dieser Basislösung gehört. Lösen Sie, von diesem Tableau ausgehend, das Problem mit der Simplexmethode, wobei Sie unter allen in Frage kommenden Eintrittsvariablen diejenige

(a) mit dem kleinsten Index,

(b) mit dem größten Index

wählen.

29. Aufgabe **(10 Punkte)**

Es sei $z_{\max}$ der optimale Zielfunktionswert eines linearen Optimierungsproblems. Das Problem werde mit der Simplexmethode gelöst, wobei in der k-ten Iteration eine ausgeartete zulässige Basislösung mit Zielfunktionswert $z_k < z_{\max}$ erscheine, in der genau eine Basisvariable den Wert 0 hat. Zeigen Sie, daß diese Basislösung in den folgenden Iterationen nicht wieder auftreten kann.