Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Institut für Mathematische Optimierung
Prof. Dr. Friedrich Juhnke
Dr. Matthias Köppe, Gebäude 18, Raum 311

Wintersemester 2003/2004

7. Übungsblatt

Lineare Optimierung

http://www.math.uni-magdeburg.de/~mkoeppe/lehre/opt1-2003

Abgabe der Übungsaufgaben: bis Donnerstag, 4. Dezember, zu Beginn der Übung

30. Aufgabe **(10 Punkte)**

Betrachten Sie das folgende „Fahrrad-Problem": n Personen wollen von Ort A nach Ort B gelangen, die Distanz beträgt 20 km. Dabei steht ihnen ein Fahrrad zur Verfügung, mit dem aber jeweils nur eine Person gleichzeitig fahren kann. Person j hat die Gehgeschwindigkeit g_j und erreicht auf dem Fahrrad die Geschwindigkeit f_j. Die Aufgabe ist nun, die Ankunftzeit der letzten Person zu minimieren. Dazu soll unter anderem das folgende LP verwendet werden:

$$\begin{aligned}
\min\quad & t \\
\text{s.t.}\quad & t - x_j - x'_j - y_j - y'_j \geq 0 \quad (1 \leq j \leq n) \\
& t - \sum_{j=1}^{n} y_j - \sum_{j=1}^{n} y'_j \geq 0 \\
& g_j x_j - g_j x'_j + f_j y_j - f_j y'_j = 20 \quad (1 \leq j \leq n) \\
& \sum_{j=1}^{n} f_j y_j - \sum_{j=1}^{n} f_j y'_j \leq 20 \\
& x_j, x'_j, y_j, y'_j \geq 0 \quad (1 \leq j \leq n)
\end{aligned}$$

a) Zeigen Sie: Der Optimalwert des LP ist eine untere Schranke für die Ankunftzeit der letzten Person. (Hinweis: Dazu sollten Sie die im LP auftretenden Variablen und Bedingungen interpretieren.)

b) Warum ist der Optimalwert des LP nur eine untere Schranke? Konstruieren Sie ein Beispiel, so daß der Optimalwert des LP echt kleiner als die minimale Ankunftzeit der letzten Person ist.

c) Versuchen Sie, eine optimale Lösung des Fahrrad-Problems für $n = 3$ und folgende Daten

j	1	2	3
g_j	4	4	8
f_j	24	24	32

zu finden. Zeigen Sie mit Hilfe des LP, daß Ihre Lösung wirklich optimal ist (verwenden Sie GLPK).

31. Aufgabe **(10 Punkte)**

Lösen Sie das folgende LP mit dem Simplex-Algorithmus auf Papier. Beachten Sie, daß das Problem noch nicht in Normalform vorliegt. (Zur Kontrolle Ihrer Lösung können Sie GLPK verwenden.)

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 - x_2 + x_3 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 4 \\ & 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 9 \\ & x_2 + 2x_3 \geq 3 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

32. Aufgabe **(10 Punkte)**

Bestimmen Sie *alle* optimalen Lösungen des folgenden LPs mit dem Simplex-Algorithmus auf Papier.

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 - x_2 \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ & 2x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 2 \\ & x_1 - x_2 + x_3 \leq 2 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

33. Aufgabe **(10 Punkte)**

Die Menge $M \subseteq \mathbf{R}^n$ heißt *sternförmig* bezüglich des Sternpunktes $\mathbf{s} \in \mathbf{R}^n$, wenn für alle $\mathbf{x} \in M$ die Strecke $[\mathbf{s}, \mathbf{x}]$ in M liegt. Die Menge

$$K := \left\{ \mathbf{s} \in \mathbf{R}^n : [\mathbf{s}, \mathbf{x}] \subseteq M \quad \forall \mathbf{x} \in M \right\}$$

ist der *Kern* von M. Zeigen Sie: K ist konvex.

Bitte denken Sie auch an die Programmieraufgabe.