OPERATIONS RESEARCH VERFAHREN METHODS OF OPERATIONS RESEARCH

XIX

Sonderdruck

VI. OBERWOLFACH - TAGUNG
ÜBER OPERATIONS RESEARCH

29. Juli - 4. August 1973

Mitherausgegeben von HANS PAUL KÜNZI

TEIL II

VERLAG ANTON HAIN · MEISENHEIM AM GLAN

ÜBER EINEN SATZ VON KLEE UND STRASZEWICZ

ROGER J.-B. WETS, KÖLN

Einige der nützlichsten und schönsten Anwendungen der Konvexitätstheorie haben ihre Ursache in den Darstellungssätzen sowie den Sätzen von HELLY, CARATHEODORY, BISHOP-DE LEEUW, CHOQUET u.a. [4]. Einer der bekanntesten Sätze ist der Satz von KREIN-MILMAN.

1. *KREIN-MILMAN.* Sei C eine kompakte, konvexe Teilmenge eines normierten linearen Raumes E. Dann ist C die konvexe Hülle der extremen Punkte von C, d. h. $C = \text{kon ext } C$.

Nach Definition ist $x \in \text{ext } C$, wenn x nicht in der konvexe Hülle anderer Punkte von C ist, d. h. falls $x \notin \text{kon}\,(C \setminus \{x\})$.

Für verschiedene Anwendungen ist es jedoch oft leichter, den Satz von KLEE-STRASZEWICZ zu benutzen. In diesem Satz wird der Begriff des exponierten Punktes verwendet. Exponierte Punkte sind oft leichter zu charakterisieren als extreme Punkte. Ein Punkt x ist ein *exponierter Punkt* einer nicht leeren, konvexen Menge C, $x \in \exp C$, wenn es eine Stützhyperebene H von C gibt, derart daß $H \cap C = (x)$. Jeder exponierte Punkt ist auch ein extremer Punkt, aber das Gegenteil ist nicht richtig. In Bild 1 ist x ein extremer Punkt, aber kein exponierter Punkt.

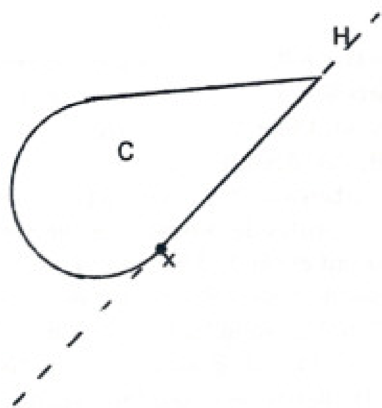

Bild 1

2. *KLEE-STRASZEWICZ.* Es sei C eine nicht leere konvexe, kompakte Teilmenge eines normierten linearen Raumes E. Dann ist C die Ab-

schließung der konvexen Hülle der exponierten Punkte von C , d. h. C = Ab kon exp C.

Der erste Beweis wurde von Straszewicz für endlich dimensionale Räume E gegeben [5]. Klee bewies den Satz für normierte lineare Räume [2]. Diese Beweise sind auf folgendem Trennungssatz aufgebaut (siehe z. B. [1]).

3. *Hyperebenen-Trennungssatz.* Sei C eine nicht leere kompakte, konvexe Teilmenge eines normierten linearen Raumes E und p ein Punkt von E mit $p \notin C$. Dann gibt es eine Hyperebene H , derart daß C in einem der durch H definierten offenen Halbräume enthalten ist und p in dem anderen.

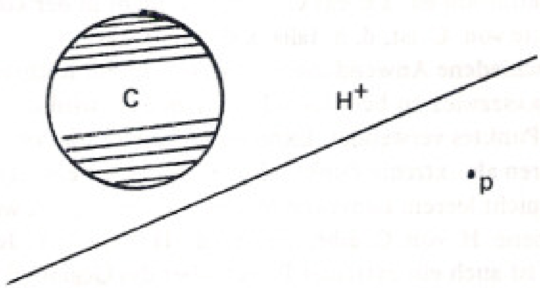

Bild 2

In dieser kurzen Darstellung wollen wir einen anderen Beweis geben, der auf einem Satz über die Trennung kompakter, konvexer Mengen durch Kugeln beruht. Diese Art des Vorgehens ergibt einen einfachen und intuitiven Beweis des Satzes von Klee-Straszewicz. Wir wurden hierzu durch die Arbeit von P. Moore [3] über verschiedene Verallgemeinerungen des Begriffes der Konvexität angeregt.

Wir arbeiten hier mit einem Euklidischen Raum E . Es ist aber einfach, den Beweis auf normierte Räume zu verallgemeinern, bei denen die Kugeln „smooth" und „rotund" sind. Zu einer Hyperebene $H = \{x \mid \langle x^*, x \rangle = \alpha\}$ $(x^* \neq 0)$ in E gehören zwei offene Halbräume, die wir mit H^+ und H^- bezeichnen. Die Euklidische Norm schreiben wir als $\|\cdot\|$, und die Einheitskugel sei B . Wenn also $y \in E$ und $d \in [0, \infty[$, dann ist $y + dB$ eine Kugel mit Zentrum y und Radius d . Den Rand einer Menge S bezeichnen wir mit ∂S .

4. *Hilfssatz.* Sei $S \subset E$ nicht leer, kompakt und $H = \{x \mid \langle x^*, x\rangle = \alpha\}$ eine Hyperebene mit $H^+ \supset S$. Dann gibt es ein $y \in E$ und eine Zahl $d \in [0, \infty[$ derart, daß $H^+ \supset y + dB \supset \text{kon}\, S$.

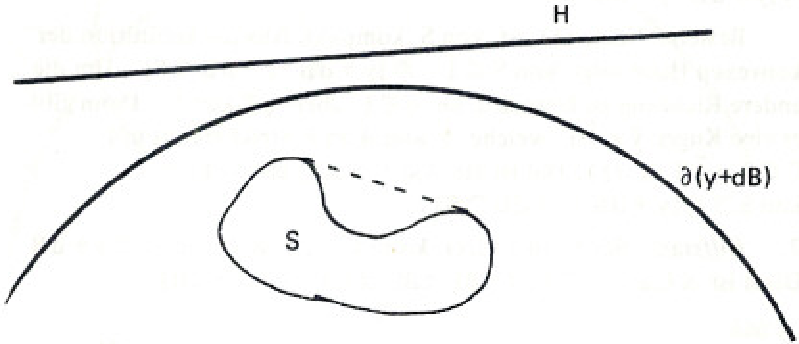

Bild 3

Beweis: Aus $H^+ \supset S$ folgt $H^+ \supset \text{kon}\, S$. Außerdem ist kon S kompakt (vgl. den Satz von Krein-Milman (1)). Sei $z \in \text{kon}\, S$ mit $\langle x^*, z\rangle = \text{Min}\, \{\langle x^*, x\rangle \mid x \in \text{kon}\, S\}$. Dann ist $z \in \partial\, \text{kon}\, S$ nach (3). Sei $\alpha > 0$ der Abstand zwischen H und z. Da $\langle x^*, z\rangle \leqslant \langle x^*, x\rangle$ für alle $x \in \text{kon}\, S$, gilt $\alpha = \underset{x}{\text{Min}}\, \underset{y}{\text{Min}}\, \{\| x - y \| \mid x \in \text{kon}\, S, y \in H\}$. Setze $y = z + d'\,(x^*)^T$ und $d = d' \, \| x^* \| + \beta$ mit $d' \in [0, +\infty[$ und $\beta \in [0, \alpha[$. Es ist klar, daß $H^+ \supset y + dB$. Es bleibt nun zu zeigen, daß es d und β gibt mit $y + dB \supset \text{con}\, S$, d. h. mit $\| x - y \| \leqslant d$ für alle $x \in \text{con}\, S$ oder $\| x - z - d\,(x^*)^T \|^2 \leqslant (d\, \| x^* \| + \beta)^2$. Dies können wir auch schreiben als $\| x - z \|^2 \leqslant 2d\, \langle x^*, x - z\rangle + 2\beta d\, \| x^* \| + \beta^2$. Die letzte Ungleichung gilt sicher, wenn $\text{Max}\, \{\| x - z\|^2 \mid x \in \text{kon}\, S\} \leqslant$ $\text{Min}\, \{2d\, \langle x^*, x - z\rangle \mid x \in \text{kon}\, S\} + 2\beta d\, \| x^* \| + \beta^2$. Da kon S kompakt ist, ist Max endlich, etwa gleich M, und $\text{Min}\, \{2d\, \langle x^*, x - z\rangle \mid x \in \text{kon}\, S\} = 0$. Wählt man daher ein $\beta \in\,]0, \alpha[$ und $d \geqslant M\,(2\beta \| x^* \|)^{-1}$, so folgt $y + dB \supset \text{kon}\, S$.

5. *Kugel-Trennungssatz.* Sei C nicht leer, kompakt und konvex und p ein Punkt in E mit $p \notin C$. Dann gibt es eine Kugel mit Zentrum y und Radius d, derart daß C und p strikt getrennt sind durch den Rand der Kugel und $C \subset y + dB$.

Beweis: Da $p \notin C$ und C kompakt ist, gibt es eine Hyperebene H, welche p und C strikt trennt, $p \in H^-$ und $C \subset H^+$, s. (3). Nun folgt mit Hilfssatz (4), daß es eine Kugel $y + dB$ mit $C \subset y + dB \subset H^+$ gibt.

6. *Folgesatz.* Sei S nicht leer, kompakt. Dann ist $\text{kon}\, S = \cap \{y + dB \mid y + dB \supset S\}$.

Beweis: Nach (1) ist $\text{kon}\, S$ kompakt. Aus der Definition der konvexen Hülle folgt $\text{kon}\, S \subset L = \cap \{y + dB \mid y + dB \supset S\}$. Um die andere Richtung zu beweisen, sei $q \in L$ aber $q \notin \text{kon}\, S$. Dann gibt es eine Kugel $\bar{y} + \bar{d}B$, welche q und $\text{kon}\, S$ strikt trennt mit $C \subset \bar{y} + \bar{d}B$, s. (5). Das ist ein Widerspruch, also gilt $\text{kon}\, S \supset \cap \{y + dB \mid y + dB \supset S\}$.

7. *Hilfssatz.* Sei C nicht leer, kompakt, konvex, und $C \subset y + dB$. Dann ist $x \in \exp C \cap (y + dB)$, falls $x \in C \cap \partial(y + dB)$.

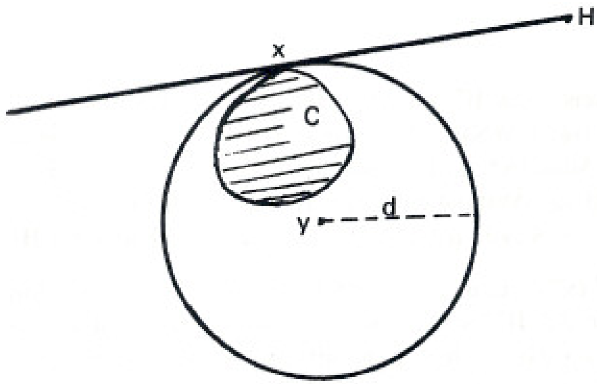

Bild 4

Beweis: Offensichtlich ist $x \in \partial(y + dB)$ genau dann, wenn $x \in \exp(y + dB)$. Es gibt eine Hyperebene H mit $H \cap (y + dB) = \{x\}$. Wegen $C \subset y + dB$ und $x \in C \cap \partial(y + dB)$ folgt $H \cap C = \{x\}$.

8. *Hilfssatz.* Sei C nicht leer, kompakt, konvex, und $C \cap \{z \mid z \notin y + dB\} \neq \emptyset$. Dann ist $\exp C \cap \{z \mid z \notin y + dB\} \neq \emptyset$.

Beweis: Sei $d' = \text{Max}\, \{\|x - y\| \mid x \in C\}$. Da C kompakt ist, ist d' endlich, und es existiert ein $v \in C$ mit $d' = \|v - y\|$. Man beachte, daß $v \in C \cap \{z \mid z \notin y + dB\}$. Es bleibt zu zeigen, daß $v \in \exp C$. Nun gilt $C \subset y + d'B$. Da $v \in C \cap \partial(y + d'B)$, so folgt nach (7) $v \in \exp C$.

9. Beweis von (2): Wir haben $K = \text{Ab kon} \exp C \subset \text{kon ext}\, C = C$ nach (1). Wir beweisen nun $K \supset C$. Nehmen wir an, daß ein $x \in C$

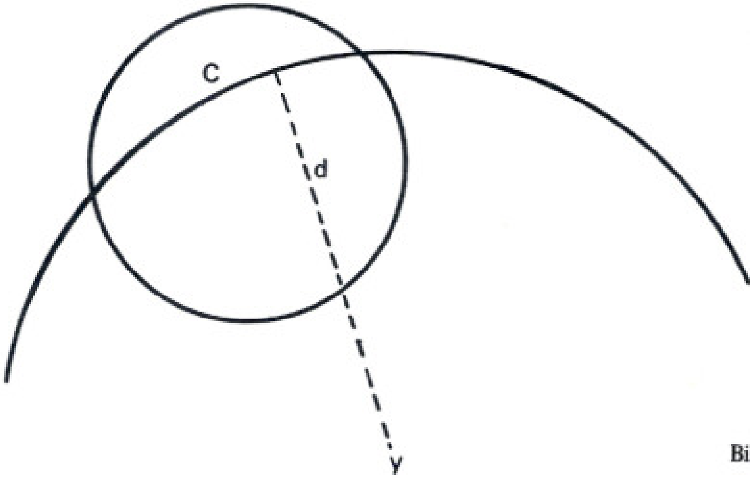

Bild 5

existiert mit $x \notin K$. Da K kompakt ist, folgt aus (5) die Existenz von $y \in E$ und $d \in [0, \infty[$ mit $K \subset y + dB$ und $x \notin y + dB$, d. h. $\{z \mid z \notin y + dB\} \cap C \neq \emptyset$. Wegen (8) gilt dann $\exp C \cap \{z \mid z \notin y + dB\} \neq \emptyset$, d. h. $K \cap \{z \mid z \notin y + dB\} \neq \emptyset$. Dies steht im Widerspruch zu $K \subset y + dB$, also gilt $K \supset C$.

Literatur

[1] Grünbaum, B.: Convex Polytopes. J. Wiley, New York, N.Y. (1967).

[2] Klee, V.: „Extremal Structure of Convex Sets II“. Math. Zeitschrift, 69 (1958), 90–104.

[3] Moore, P.: Generalized Convexitiy. Ph. Dissertation, Univ. of Kentucky, July 1973.

[4] Phelps, R.: Lecturs on Choquet's Theorem. Van Nostrand, Princeton, N. J. (1966).

[5] Straszewicz, S.: „Über exponierte Punkte abgeschlossener Punktmengen“. Fund. Math., 24 (1935), 139–143.

Roger J.-B. Wets
Mathematisches Institut
der Universität Köln
D–5 Köln-Lindenthal
Weyertal 86–90

und

University of Kentucky
Department of Mathematics
Lexington, Kentucky 40 506