

# CABLES

&

# TRANSMISSION

REVUE TRIMESTRIELLE PUBLIÉE PAR  
**SOTELEC**

Société mixte pour le développement de la technique des Télécommunications sur câbles  
Société à responsabilité limitée au capital de 1.000.000 francs

16, RUE DE LA BAUME, PARIS-VIII<sup>e</sup>

GROUPANT

**L'ADMINISTRATION DES POSTES, TÉLÉGRAPHES & TÉLÉPHONES**

**LA COMPAGNIE GÉNÉRALE D'ÉLECTRICITÉ (C G E)**  
54, RUE LA BOÉTIE, PARIS-VIII<sup>e</sup>

**LA SOCIÉTÉ LIGNES TÉLÉGRAPHIQUES ET TÉLÉPHONIQUES (L T T)**  
89, RUE DE LA FAISANDERIE, PARIS-XVI<sup>e</sup>

**LA SOCIÉTÉ ALSACIENNE DE CONSTRUCTIONS MÉCANIQUES (S A C M)**  
69, RUE DE MONCEAU, PARIS-VIII<sup>e</sup>

**LA SOCIÉTÉ ANONYME DE TÉLÉCOMMUNICATIONS (S. A. I.)**  
41, RUE CANTAGREL, PARIS-XIII<sup>e</sup>



## *Sommaire*

Localisation des défauts de rigidité diélectrique sur les paires concentriques ou symétriques. . . . .	I. EYRAUD	91
Note sur un signal de durée finie et d'énergie filtrée maximum. . . . .	J. A. VILLE & J. BOUZITAT	102
Structures granulaires ferromagnétiques . . . . .	P. M. PRACHE	128
Dérangements dus à la foudre sur le câble téléphonique Abldjan-Agboville . . . . .	R. BÉRAUD & H. PECH	167
Informations. . . . .	* * *	176

La reproduction des articles publiés dans **CABLES & TRANSMISSION** est librement autorisée sous réserve de l'indication complète de l'origine.

LA REVUE **CABLES & TRANSMISSION** N'EST PAS MISE EN VENTE DANS LE COMMERCE

## NOTE SUR UN SIGNAL DE DURÉE FINIE ET D'ÉNERGIE FILTRÉE MAXIMUM

par J.-A. VILLE,  
Secrétaire général technique,

et J. BOUZITAT,

Ingénieur

au Département Energie nucléaire, Télécommunications, Electronique  
de la Société Alsacienne de Constructions Mécaniques.

### RÉSUMÉ

La présente étude a pour objet de déterminer la valeur maximum  $K_0 = 1 - \epsilon_0$  du rendement énergétique  $K = 1 - \epsilon$  qu'il est possible d'obtenir, si l'on fait passer un signal de durée finie  $2T$  à travers un filtre passe-bas présentant une coupure brusque à la fréquence  $F$ .

Elle se propose en même temps de déterminer le signal  $s(t)$  correspondant, de durée limitée à l'intervalle de temps  $(-T, +T)$ , et tel que la coupure de toutes les fréquences supérieures à  $F$ , dans son spectre  $\varphi(f)$ , entraîne la perte relative minimum d'énergie  $\epsilon_0 = (1 - K_0)$ .

On montre d'abord que, si  $S(t)$  est le signal ainsi formé par filtrage à partir du signal cherché  $s(t)$ , de durée finie et d'énergie filtrée maximum,

$$S(t) = K s(t) \text{ pour } -T < t < +T,$$

$K = 1 - \epsilon$  étant le rendement énergétique de la transformation  $s(t) \rightarrow S(t)$ .

On montre ensuite que les fonctions  $S(\Gamma\lambda)$  et  $\varphi(F\lambda)$  de la variable sans dimension  $\lambda$  sont solutions d'une même équation intégrale linéaire et homogène, qui dépend seulement du produit sans dimension  $h = FT$ , et dont la plus petite valeur propre est égale à  $1/K_0$ . (On en déduit que ces deux fonctions de  $\lambda$  sont proportionnelles).

On montre enfin que l'ensemble des solutions de cette équation intégrale est identique à l'ensemble des solutions bornées d'une équation différentielle linéaire et homogène, du type de Liouville, qui se présente dans l'étude de la décomposition de l'équation des ondes en coordonnées homofocales.

A partir de ces résultats, on détermine complètement le signal  $s(t)$ , qui est pair, et un signal impair  $s_1(t)$  défini de façon analogue parmi tous les signaux impairs, ainsi que les rendements énergétiques  $K_0$  et  $K_1$  respectivement obtenus dans le filtrage des signaux  $s(t)$  et  $s_1(t)$ .

On établit, pour terminer, que, si le signal filtré doit être limité au même intervalle de temps que le signal initial, les signaux  $s(t)$  et  $s_1(t)$  sont encore ceux qui permettent d'obtenir les rendements énergétiques  $K_0$  et  $K_1$  les plus grands possibles, respectivement égaux aux carrés des rendements  $K_0$  et  $K_1$  précédemment déterminés.

### PLAN

- I. — INTRODUCTION.
- II. — DÉFINITION ET CHOIX DU SIGNAL  $s(t)$  DE DURÉE FINIE ET D'ÉNERGIE FILTRÉE MAXIMUM.
- III. — COMPARAISON DU SIGNAL  $s(t)$  ET DE SON SPECTRE  $\varphi(f)$ .
- IV. — RELATION ENTRE LES ÉQUATIONS INTÉGRALES (14), (15) ET (19), ET L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE (24).

- V. — RENDEMENT ÉNERGÉTIQUE DU FILTRAGE D'UN SIGNAL  $\sigma(t)$  DE DURÉE FINIE, DANS UN CAS GÉNÉRAL.
- VI. — DÉTERMINATION DU SIGNAL PAIR  $s(t)$ , DU SIGNAL IMPAIR  $s_1(t)$ , ET DES RENDEMENTS  $K_0(k)$  ET  $K_1(k)$  CORRESPONDANTS.
- 6.1. Premier mode de représentation des fonctions  $G_l(k, \lambda)$ .
- 6.2. Second mode de représentation des fonctions  $G_l(k, \lambda)$ .
- 6.3. Détermination des rendements  $K_l(k)$  à partir des deux représentations des fonctions  $G_l(k, \lambda)$ . Signaux  $s(t)$  et  $s_1(t)$ .
- VII. — ÉTUDE DES SIGNAUX  $s(t)$  ET  $s_1(t)$  POUR LES GRANDES VALEURS DU PARAMÈTRE  $k = 2\pi FT$ .
- VIII. — COMPLÈMENT : CAS OU LE FILTRAGE DU SIGNAL  $s(t)$  EST SUIVI D'UNE LIMITATION DANS LE TEMPS.

ANNEXE I. — ÉQUATION DES ONDES EN COORDONNÉES HOMOFOCALES.

ANNEXE II. — TABLEAUX ET FIGURES.

I. — INTRODUCTION.

Il est bien connu qu'entre la durée  $\Delta t = 2T$  d'un signal et la largeur  $\Delta f = 2F$  de la bande, symétrique par rapport à l'origine, occupée par son spectre dans le domaine des fréquences, il existe une relation de la forme

$$\Delta t \cdot \Delta f \geq 4h, \quad \text{ou} \quad T \cdot F \geq h,$$

$h$  étant une constante sans dimensions, dont la valeur dépend essentiellement de la manière dont les intervalles  $\Delta t$  et  $\Delta f$  ont été définis.

L'inégalité précédente est fondamentale pour la technique des télécommunications. La présente note a pour objet de la préciser.

Il est connu que, si le signal est de durée finie, son spectre s'étend jusqu'à l'infini, et que, réciproquement, si le spectre est borné, le signal qui lui correspond est de durée infinie (voir, par exemple, [5], § II). Dans l'inégalité fondamentale,  $\Delta t$  et  $\Delta f$  doivent donc représenter un intervalle de temps et un intervalle de fréquence qui contiennent non pas toute l'énergie du signal, mais seulement presque toute cette énergie.

Si donc, à un signal donné, nous associons un intervalle de temps  $(\Delta t)_\varepsilon$  contenant la fraction  $(1 - \varepsilon)$  de l'énergie, et un intervalle de fréquence  $(\Delta f)_{\varepsilon'}$  contenant la fraction  $(1 - \varepsilon')$  de l'énergie, les intervalles  $(\Delta t)_\varepsilon$  et  $(\Delta f)_{\varepsilon'}$  vérifient une inégalité de la forme

$$(\Delta t)_\varepsilon \cdot (\Delta f)_{\varepsilon'} \geq 4h(\varepsilon, \varepsilon').$$

D'après ce qui vient d'être dit, il est certain que  $h(0, 0) = \infty$ . Mais il se trouve heureusement que, même quand  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  sont très petits,  $h(\varepsilon, \varepsilon')$  prend des valeurs assez petites pour être utilisables. Sans cette circonstance, il serait impossible de procéder à des transmissions correctes sur des bandes de fréquences relativement étroites.

Le présent travail étudie la fonction  $h(0, \varepsilon)$ , laquelle se confond, pour des raisons de symétrie, avec  $h(\varepsilon, 0)$ . Plus précisément, et de façon équivalente, il a pour objet de déterminer, en fonction du paramètre  $k = 2\pi h = 2\pi FT$ , la valeur minimum  $\varepsilon_0 = 1 - K_0$  de la perte relative d'énergie  $\varepsilon = 1 - K$  qu'il faut accepter si l'on coupe toutes les fréquences supérieures à  $F$  dans le spectre d'un signal de durée finie  $2T$ .

On se propose, en même temps, de déterminer le signal correspondant  $s(t)$ , de durée finie  $2T$ , dont l'énergie est aussi peu absorbée que possible par ce filtrage idéal qui, comme nous le verrons au chapitre VIII, peut être suivi d'une limitation dans le temps. [Le rendement énergétique maximum passe alors de  $K_0$  à  $K_0^2$ ].

Nous désignerons un tel signal  $s(t)$  sous le nom de *signal de durée finie et d'énergie filtrée maximum*.

Les résultats d'une étude analogue ont déjà été sommairement donnés par J. H. H. Chalk [1]. Ces résultats sont ici développés et complétés. Nous exposons en détail, et de façon aussi élémentaire que possible, une méthode qui permet de pousser jusqu'au calcul numérique la détermination du signal  $s(t)$  et du rendement énergétique maximum  $K_0$  qui lui correspond, en utilisant des tables dressées par Stratton, Morse, Chu et Hutner [4]. Des extraits de ces tables sont donnés dans l'Annexe II, avec les résultats numériques et graphiques des calculs, complètement effectués pour  $k = 2\pi FT = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ . Nous déterminons de plus, théoriquement et numériquement, la forme asymptotique du signal  $s(t)$  pour les grandes valeurs de  $k$ .

Le signal  $s(t)$  étant pair, les mêmes questions sont traitées pour le signal impair  $s_1(t)$  défini de façon analogue parmi tous les signaux impairs, et pour le rendement énergétique  $K_1$  qui lui correspond.

## II. — DÉFINITION ET CHOIX DU SIGNAL $s(t)$ DE DURÉE FINIE ET D'ÉNERGIE FILTRÉE MAXIMUM.

On se propose de déterminer un signal  $s(t)$ , de durée limitée à un certain intervalle de temps  $(-T + T)$ , et tel que, si l'on fait passer ce signal à travers un filtre passe-bas présentant une coupure brusque à une certaine fréquence  $F$ , la perte relative d'énergie  $\epsilon = 1 - K$  qui en résulte prenne la valeur  $\epsilon_0 = 1 - K_0$  la plus petite possible.

Le signal  $S(t)$ , ainsi déduit de  $s(t)$  par un filtrage qui limite son spectre à l'intervalle de fréquence  $(-F, +F)$ , a pour expression

$$(1) \quad S(t) = \int_{-F}^{+F} e^{2\pi i f t} df \int_{-T}^{+T} s(\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau = \int_{-T}^{+T} \frac{\sin 2\pi F(t-\tau)}{\pi(t-\tau)} s(\tau) d\tau,$$

$$\text{ou } S(t) = \int_{-T}^{+T} A_F(t-\tau) \cdot s(\tau) d\tau, \quad \text{si l'on pose } A_h(x) = \frac{\sin(2\pi hx)}{\pi x}.$$

Il s'agit de choisir le signal  $s(t)$  de manière à rendre maximum le rendement énergétique  $K = 1 - \epsilon$  de la transformation  $s(t) \rightarrow S(t)$ , qui coupe toutes les fréquences supérieures à  $F$  dans le spectre  $\varphi(f)$  du signal  $s(t)$  de durée finie  $2T$ , c'est-à-dire le rapport

$$(2) \quad K = \frac{\int_{-F}^{+F} |\varphi(f)|^2 df}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(f)|^2 df} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} S^2(t) dt}{\int_{-T}^{+T} s^2(t) dt}.$$

$$\text{D'ailleurs } \int_{-\infty}^{+\infty} S^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-T}^{+T} \int_{-T}^{+T} A_F(t-u) \cdot A_F(t-v) \cdot s(u) \cdot s(v) du dv,$$

$$(3) \quad = \int_{-T}^{+T} \int_{-T}^{+T} A_F(u-v) \cdot s(u) \cdot s(v) du dv,$$

$$= \int_{-T}^{+T} S(t) \cdot s(t) dt.$$

Pour toute variation  $\delta s(t)$  ajoutée au signal  $s(t)$  cherché, la variation première du rapport  $K$  doit être nulle, ce qui donne la condition nécessaire (mais non suffisante) :

$$(4) \quad \int_{-T}^{+T} (S \cdot \delta s + s \cdot \delta S) dt \Big/ \int_{-T}^{+T} 2s \cdot \delta s \cdot dt = \int_{-T}^{+T} S \cdot s \cdot dt \Big/ \int_{-T}^{+T} s^2 \cdot dt,$$

$$\text{avec } \delta S(t) = \int_{-T}^{+T} A_F(t-\tau) \cdot \delta s(\tau) \cdot d\tau,$$

$$\text{d'où il résulte, compte tenu de (1), que } \int_{-T}^{+T} s \cdot \delta S \cdot dt = \int_{-T}^{+T} S \cdot \delta s \cdot dt.$$

La condition (4) peut donc être écrite sous la forme équivalente

$$(4') \quad \int_{-T}^{+T} S \cdot \delta s \cdot dt \Big/ \int_{-T}^{+T} s \cdot \delta s \cdot dt = \int_{-T}^{+T} S \cdot s \cdot dt \Big/ \int_{-T}^{+T} s^2 \cdot dt = K,$$

ou encore sous la forme

$$(5) \quad \int_{-T}^{+T} [S(t) - K s(t)] \delta s(t) \cdot dt = 0.$$

La condition (5) doit être satisfaite quelle que soit la variation  $\delta s(t)$  ajoutée au signal  $s(t)$ , ce qui impose manifestement la relation :

$$(6) \quad S(t) = K s(t), \quad \text{pour } -T < t < +T.$$

[Il suffit pour s'en rendre compte de choisir  $\delta s(t)$  proportionnel à  $[S(t) - K s(t)]$  dans l'intervalle d'intégration  $(-T, +T)$ , ce qui permettrait d'ailleurs effectivement d'obtenir, à partir de tout signal  $s(t)$  ne vérifiant pas la relation (6), un signal dont le filtrage aurait un rendement énergétique plus grand.]

Réciproquement, la relation (6), où  $K$  est un facteur constant quelconque, entraîne, d'après (3), que le rendement énergétique de la transformation  $s(t) \rightarrow S(t)$  est égal à  $K$ , et par suite que la condition (4) ou (4') est satisfaite pour toute variation  $\delta s(t)$ .

Ainsi, d'après les relations (1) et (6), le signal filtré  $S(t)$  doit être solution de l'équation intégrale linéaire et homogène

$$(7) \quad S(t) = \frac{1}{K} \int_{-T}^{+T} A_F(t-\tau) \cdot S(\tau) d\tau = \frac{1}{K} \int_{-T}^{+T} \frac{\sin 2\pi F(t-\tau)}{\pi(t-\tau)} S(\tau) d\tau.$$

D'ailleurs, tout signal  $S(t)$  vérifiant une telle équation intégrale a un spectre limité à l'intervalle de fréquence  $(-F, +F)$ . Et, si le signal  $s(t)$ , limité à l'intervalle de temps  $(-T, +T)$ , est défini à partir du signal  $S(t)$  par la relation (6),  $S(t)$  résulte bien de  $s(t)$  par le filtrage (1), et le rendement énergétique de cette transformation est égal à  $K$ , d'après la relations (3) qui donne, compte tenu de (6),

$$(8) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} S^2(t) dt = K \int_{-T}^{+T} s^2(t) dt = \frac{1}{K} \int_{-T}^{+T} S^2(t) dt.$$

Ainsi, le signal cherché  $s(t)$ , de durée finie et d'énergie filtrée maximum, est identique, dans l'intervalle  $(-T, +T)$  où il n'est pas nul, à l'une des solutions d'une équation intégrale linéaire et homogène (7), où la constante  $K$ , évidemment comprise entre 0 et 1 d'après (8), doit être choisie aussi grande que possible, puisqu'elle donne la valeur du rendement énergétique obtenu dans le filtrage du signal  $s(t)$ .

Or on sait qu'une équation intégrale linéaire et homogène, telle que (7), n'admet de solution non identiquement nulle que si la constante  $1/K$  est égale à l'une des valeurs propres  $1/K_i$  du noyau symétrique

$$A_F(t-\tau) = \frac{\sin 2\pi F(t-\tau)}{\pi(t-\tau)}.$$

Les valeurs propres  $1/K_i$  sont discrètes, toutes réelles, et énumérables par ordre de module croissant. (Voir, par exemple, [2], chap. IV, §§ 230-233.)

Les valeurs propres  $1/K_i$  du noyau  $A_F(t-\tau)$  sont de plus toutes distinctes (cf. § 6.3), et par suite toutes les solutions d'une même équation intégrale (7), correspondant à la même valeur  $K_n$  de la constante  $K$ , sont proportionnelles à une même fonction  $\sigma_n(t)$ , dite *fonction propre associée à la valeur propre  $1/K_n$* .

D'autre part, deux fonctions propres distinctes du noyau  $A_F(t-\tau)$ , respectivement associées à deux valeurs propres différentes  $1/K_m$  et  $1/K_n$ , sont *orthogonales* puisque

$$(9) \quad (K_m - K_n) \int_{-T}^{+T} \sigma_m(t) \cdot \sigma_n(t) dt = \int_{-T}^{+T} \int_{-T}^{+T} A_F(t-\tau) [\sigma_m(\tau) \sigma_n(t) - \sigma_n(\tau) \sigma_m(t)] d\tau \cdot dt = 0.$$

Enfin, les fonctions propres  $\sigma_i(t)$  peuvent être supposées *normées*, c'est-à-dire telles que

$$\int_{-T}^{+T} [\sigma_n(t)]^2 dt = 1, \quad \text{quel que soit } n.$$

Le noyau symétrique  $A_F(t-\tau)$ , ayant toutes ses valeurs propres  $1/K_i$  positives (et même supérieures à 1) d'après (8), est un noyau dit *positif*, et peut par suite être mis sous la forme de la série, absolument et uniformément convergente dans le domaine  $-T < t < +T$ ,  $-T < \tau < +T$ ,

$$(10) \quad A_F(t-\tau) = \frac{\sin 2\pi F(t-\tau)}{\pi(t-\tau)} = \sum_{i=0}^{\infty} K_i \sigma_i(t) \cdot \sigma_i(\tau).$$

(Cf. Goursat, Cours d'Analyse Mathématique, 5<sup>e</sup> édition, t. III, § 592, Gauthier-Villars, Paris, 1942).

Réciproquement, si le noyau symétrique  $A_F(t-\tau)$  est mis, par une méthode quelconque, sous la forme d'une telle série, les fonctions  $\sigma_i(t)$  étant deux à deux orthogonales et normées, ces fonctions sont les fonctions propres du noyau  $A_F(t-\tau)$ , et les coefficients correspondants  $K_i$  sont les inverses des valeurs propres qui leur sont respectivement associées.

Le fait que le noyau symétrique  $A_F(t-\tau)$ , dont toutes les valeurs propres  $1/K_i$  sont supérieures à 1, admette une valeur propre  $1/K_0$  plus petite que toutes les autres, établit l'existence d'un maximum  $K_0(F, T)$  inférieur à 1 pour le rendement énergétique  $K$  qu'il est possible d'obtenir si l'on coupe toutes les fréquences supérieures à  $F$  dans le spectre d'un signal de durée finie  $2T$ , et prouve que ce rendement maximum peut être atteint par un choix convenable du signal qui doit être soumis à ce filtrage.

Le signal cherché  $s(t)$ , de durée finie et d'énergie filtrée maximum, et le signal filtré correspondant  $S(t)$  sont donc définis, à un facteur constant près et compte tenu de la relation (6), par la fonction  $\sigma_s(t)$ , prise parmi les fonctions propres  $\sigma_t(t)$  du noyau symétrique  $A_T(t-\tau) = \frac{\sin 2\pi F(t-\tau)}{\pi(t-\tau)}$ , et associée à la plus petite de ses valeurs propres  $1/K_1$ .

Le rendement énergétique maximum  $K_0(F, T) = 1 - \varepsilon_0(F, T)$ , obtenu dans le filtrage du signal  $s(t)$  ainsi choisi, est égal à l'inverse de la plus petite valeur propre  $1/K_0$  du noyau  $A_T(t-\tau)$ .

Il importe d'observer que l'équation intégrale (7) peut être écrite, grâce au changement de variable  $t = T\lambda$ , sous la forme équivalente

$$(7) \quad S(T\lambda) = \frac{1}{K} \int_{-1}^{+1} A_{TT}(\lambda - \mu) \cdot S(T\mu) d\mu.$$

La fonction  $S(T\lambda)$  de la variable sans dimension  $\lambda$ , et le rendement énergétique maximum  $K_0(F, T)$ , dépendent donc seulement du produit sans dimension  $h = FT$ .

### III. — COMPARAISON DU SIGNAL $s(t)$ ET DE SON SPECTRE $\varphi(f)$ .

D'après les formules de Fourier, le spectre  $\varphi(f)$  du signal  $s(t)$ , limité à l'intervalle de temps  $(-T, +T)$ , est donné par la relation

$$(11) \quad \varphi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) e^{-2\pi j f \tau} d\tau = \frac{1}{K} \int_{-T}^{+T} S(\tau) e^{-2\pi j f \tau} d\tau;$$

et le signal filtré  $S(t)$ , dont le spectre  $\Phi(f)$  coïncide avec  $\varphi(f)$  dans l'intervalle de fréquences  $(-F, +F)$  où il n'est pas nul, se déduit de  $\varphi(f)$  par la relation

$$(12) \quad S(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\nu) e^{2\pi j \nu t} d\nu = \int_{-F}^{+F} \varphi(\nu) e^{2\pi j \nu t} d\nu.$$

Il en résulte que le spectre  $\varphi(f)$  du signal  $s(t)$  de durée finie et d'énergie filtrée maximum est solution de l'équation intégrale linéaire et homogène

$$(13) \quad \varphi(f) = \frac{1}{K} \int_{-F}^{+F} A_T(f-\nu) \cdot \varphi(\nu) d\nu = \frac{1}{K} \int_{-F}^{+F} \frac{\sin 2\pi T(f-\nu)}{\pi(f-\nu)} \varphi(\nu) d\nu,$$

qui peut être écrite, grâce au changement de variable  $f = F\lambda$ , sous la forme équivalente

$$(13') \quad \varphi(F\lambda) = \frac{1}{K} \int_{-1}^{+1} A_{TT}(\lambda - \mu) \cdot \varphi(F\mu) d\mu.$$

Ainsi, les fonctions  $\varphi(F\lambda)$  et  $S(T\lambda)$  de la variable sans dimension  $\lambda$  sont, d'après (7) et (13'), solutions de la même équation intégrale linéaire et homogène

$$(14) \quad G(\lambda) = \frac{1}{K} \int_{-1}^{+1} A_{TT}(\lambda - \mu) \cdot G(\mu) d\mu = \frac{1}{K} \int_{-1}^{+1} \frac{\sin 2\pi FT(\lambda - \mu)}{\pi(\lambda - \mu)} G(\mu) d\mu.$$

Les valeurs propres  $1/K_i$  du noyau  $A_{TT}(\lambda - \mu)$  étant toutes distinctes (cf. § 6.3), il en résulte que les fonctions  $\varphi(F\lambda)$  et  $S(T\lambda)$  sont identiques, à un facteur constant près. Mais, tandis que  $S(T\lambda)$  est réel,  $\varphi(F\lambda)$  peut être complexe pourvu que  $\varphi(-F\lambda)$  et  $\varphi(F\lambda)$  soient conjugués.

Ainsi,  $\alpha$  et  $\beta$  désignant deux facteurs constants réels,

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(F\lambda) \equiv (\alpha + j\beta) S(T\lambda), \\ \varphi(-F\lambda) \equiv (\alpha + j\beta) S(-T\lambda) = (\alpha - j\beta) S(T\lambda). \end{array} \right.$$

Par suite, ou bien  $\varphi(F\lambda) \equiv \alpha S(T\lambda)$ ,

auquel cas le spectre  $\varphi(f)$  est réel et le signal  $S(t)$  est pair;

ou bien  $\varphi(F\lambda) \equiv j\beta S(T\lambda)$ ,

auquel cas le spectre  $\varphi(f)$  est imaginaire pur et le signal  $S(t)$  est impair.

Bien entendu, une seule de ces deux éventualités se trouve réalisée dans le cas du signal  $s(t)$  de durée finie et d'énergie filtrée maximum (nous verrons au § 6.3 que c'est la première). Mais il est intéressant de poursuivre l'étude de ces deux cas (cf. chap. V et VI), entre lesquels se répartissent les diverses solutions des équations intégrales (14) correspondant à la suite des valeurs propres  $1/K_i$  que peut prendre le coefficient  $1/K$ .

Les résultats suivants se déduisent simplement de la comparaison des équations (11) et (12) :

Si le signal  $s(t)$  est pair, les fonctions  $\varphi(F\lambda)$  et  $S(T\lambda)$  sont solutions d'une même équation intégrale linéaire et homogène

$$(15) \quad G_p(\lambda) = \frac{1}{H_p} \int_{-1}^{+1} \sqrt{FT} \cos(2\pi FT\lambda\mu) \cdot G_p(\mu) d\mu.$$

Alors

$$(16) \quad \varphi(F\lambda) \equiv \frac{1}{H_p} \sqrt{\frac{T}{F}} S(T\lambda),$$

et le rendement énergétique de la transformation  $s(t) \rightarrow S(t)$  a pour valeur :

$$(17) \quad K = H_p^2.$$

Le signal pair  $s(t)$  et son spectre réel  $\varphi(f)$  sont définis, en fonction d'une solution  $G_p(\lambda)$  de l'équation intégrale (15) correspondant à la plus petite valeur propre  $1/H_p$ , par les relations suivantes, où  $c$  est un facteur constant arbitraire,

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} s(t) = \begin{cases} c G_p\left(\frac{t}{T}\right), & \text{pour } -T < t < +T, \\ 0, & \text{pour } |t| > T; \end{cases} \\ \varphi(f) = c H_p \sqrt{\frac{T}{F}} G_p\left(\frac{f}{F}\right). \end{array} \right.$$

Si le signal  $s(t)$  est impair, les fonctions  $\varphi(F\lambda)$  et  $S(T\lambda)$  sont solutions d'une même équation intégrale linéaire et homogène

$$(19) \quad G_i(\lambda) = \frac{1}{H_i} \int_{-1}^{+1} \sqrt{FT} \sin(2\pi FT\lambda\mu) \cdot G_i(\mu) d\mu.$$

Alors

$$(20) \quad \varphi(F\lambda) \equiv \frac{1}{j H_i} \sqrt{\frac{T}{F}} S(T\lambda),$$

et le rendement énergétique de la transformation  $s(t) \rightarrow S(t)$  a pour valeur

$$(21) \quad K = H_i^2.$$

Le signal impair  $s(t)$  et son spectre imaginaire pur  $\varphi(f)$  sont définis, en fonction d'une solution  $G_i(\lambda)$  de l'équation intégrale (19) correspondant à la plus petite valeur propre  $1/H_i$ , par les relations suivantes, où  $c$  est un facteur constant arbitraire,

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} s(t) = \begin{cases} c G_i\left(\frac{t}{T}\right), & \text{pour } -T < t < +T, \\ 0, & \text{pour } |t| > T; \end{cases} \\ \varphi(f) = -j c H_i \sqrt{\frac{T}{F}} G_i\left(\frac{f}{F}\right). \end{array} \right.$$

Remarque. — Il est intéressant d'observer que les noyaux symétriques

$$\sqrt{FT} [\cos(2\pi FT\lambda\mu) \pm \sin(2\pi FT\lambda\mu)]$$

admettent pour premier itéré le noyau  $A_{FT}(\lambda - \mu)$  de l'équation intégrale (14), puisque

$$\begin{aligned} & FT \int_{-1}^{+1} [\cos(2\pi FT\lambda u) \pm \sin(2\pi FT\lambda u)] [\cos(2\pi FT u \mu) \pm \sin(2\pi FT u \mu)] du \\ &= FT \int_{-1}^{+1} \left\{ \cos[2\pi FT(\lambda - \mu)u] \pm \sin[2\pi FT(\lambda + \mu)u] \right\} du = \frac{\sin 2\pi FT(\lambda - \mu)}{\pi(\lambda - \mu)} = A_{FT}(\lambda - \mu). \end{aligned}$$

D'ailleurs les noyaux  $\sqrt{FT} \cos(2\pi FT \lambda \mu)$  de l'équation intégrale (15), et  $\sqrt{FT} \sin(2\pi FT \lambda \mu)$  de l'équation intégrale (19), dont la somme et la différence ont pour premier itéré le noyau  $A_{FT}(\lambda - \mu)$  de l'équation intégrale (14), sont orthogonaux puisque

$$FT \int_{-1}^{+1} \cos(2\pi FT \lambda u) \cdot \sin(2\pi FT u \mu) du = 0,$$

d'après de simples considérations de parité.

On déduit alors de la théorie du développement des noyaux itérés ([2], chap. IV, § 234) que le noyau  $A_{FT}(\lambda - \mu)$  est la somme de la série, absolument et uniformément convergente dans le domaine  $-1 < \lambda < +1$ ,  $-1 < \mu < +1$ ,

$$(23) \quad A_{FT}(\lambda - \mu) = \frac{\sin 2\pi FT(\lambda - \mu)}{\pi(\lambda - \mu)} = \sum_n H_n^2 \psi_{Fn}(\lambda) \cdot \psi_{Fn}(\mu) + \sum_m H_m^2 \psi_{Fm}(\lambda) \cdot \psi_{Fm}(\mu),$$

où les fonctions  $\psi_{Fn}$  et  $\psi_{Fm}$ , orthogonales et normées  $\left\{ \int_{-1}^{+1} [\psi_l(\lambda)]^2 d\lambda = 1 \right\}$ , sont respectivement

les fonctions propres (paires) du noyau  $\sqrt{FT} \cos(2\pi FT \lambda \mu)$  et les fonctions propres (impaires) du noyau  $\sqrt{FT} \sin(2\pi FT \lambda \mu)$ , et où les coefficients  $H_n$  et  $H_m$  sont les inverses des valeurs propres respectivement associées à ces fonctions dans les équations intégrales (15) et (19).

Ainsi se trouvent confirmés les résultats précédemment obtenus :

— les solutions des équations intégrales (14) sont données par la réunion de celles des équations intégrales (15) (solutions paires) et de celles des équations intégrales (19) (solutions impaires);

— les valeurs propres  $1/K$  correspondantes, dans l'équation intégrale (14), sont les carrés des valeurs propres  $1/H_n$  et  $1/H_m$  respectivement associées aux mêmes fonctions propres dans les équations intégrales (15) ou (19).

[Il faut observer que les formules (10) et (23) se ramènent l'une à l'autre par le changement de variables  $t = T\lambda$ ,  $\tau = T\mu$ , compte tenu des relations

$$K_l = H_l^2; \quad \sigma_l(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{T}} \psi_l\left(\frac{t}{T}\right).]$$

#### IV. — RELATION ENTRE LES ÉQUATIONS INTÉGRALES (14), (15) ET (19), ET L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE (24)<sup>1)</sup>.

A) Considérons l'équation différentielle linéaire et homogène suivante :

$$(24) \quad D_\lambda G(\lambda) \equiv \frac{d}{d\lambda} \left[ (\lambda^2 - 1) \frac{dG(\lambda)}{d\lambda} \right] + (2\pi FT \lambda)^2 G(\lambda) = CG(\lambda),$$

où  $C$  est un paramètre réel constant appelé « constante de séparation ».

C'est une équation « autoadjointe », du type de Liouville (voir, par exemple, [3], § 6.3, pp. 719 sqq.). Elle n'admet de solution  $g(\lambda)$  non identiquement nulle, deux fois dérivable et bornée dans l'intervalle fermé  $-1 \leq \lambda \leq +1$ , que pour certaines valeurs discrètes  $C_l$  du paramètre  $C$ . Les solutions correspondantes  $g_l(\lambda)$  seront appelées dans la suite *solutions bornées des équations* (24).

On montre que les valeurs discrètes  $C_l$  sont énumérables par ordre croissant à partir de la plus petite d'entre elles  $C_0$ , que les  $C_l$  ainsi rangées croissent indéfiniment avec le rang  $l$ , et qu'une solution bornée  $g_n(\lambda)$  correspondant à la constante  $C_n$  de rang  $n$  présente  $n$  zéros dans l'intervalle  $-1 < \lambda < 1$ . ([3], § 6.3, pp. 719-725).

L'intégrale générale de l'équation différentielle (24) qui admet l'intégrale particulière  $g_n(\lambda)$  est

$$(25) \quad G_n(\lambda) = g_n(\lambda) \left[ a + b \int_0^\lambda \frac{d\mu}{(\mu^2 - 1) [g_n(\mu)]^2} \right],$$

où  $a$  et  $b$  sont deux constantes arbitraires.

Il en résulte que toutes les solutions bornées d'une même équation (24), correspondant à la même valeur  $C_n$  du paramètre  $C$ , sont proportionnelles, et que toute solution non bornée de cette même équation présente deux singularités logarithmiques aux points  $\lambda = \pm 1$ .

D'autre part, deux solutions bornées distinctes des équations (24), correspondant à deux valeurs différentes  $C_m$  et  $C_n$  du paramètre  $C$ , sont *orthogonales*, puisque

$$(26) \quad (C_m - C_n) \int_{-1}^{+1} g_m(\lambda) \cdot g_n(\lambda) d\lambda = \int_{-1}^{+1} \left\{ g_m(\lambda) \frac{d}{d\lambda} \left[ (1 - \lambda^2) \frac{dg_n(\lambda)}{d\lambda} \right] - g_n(\lambda) \frac{d}{d\lambda} \left[ (1 - \lambda^2) \frac{dg_m(\lambda)}{d\lambda} \right] \right\} d\lambda = 0,$$

comme le montre immédiatement une double intégration par parties.

1) Le lecteur peut omettre les parties A), B), C), D), du chapitre IV, s'il en admet la conclusion E).

Enfin, il est possible de montrer que la suite de toutes les solutions bornées  $g_l(\lambda)$ , supposées *normées*  $\left\{ \int_{-1}^{+1} [g_l(\lambda)]^2 d\lambda = 1 \right\}$ , des équations (24) forme un *système orthonormé complet* ([3], § 6.3,

Dp. 736-739), c'est-à-dire que toute fonction  $G(\lambda)$ , deux fois dérivable et bornée dans l'intervalle fermé  $-1 \leq \lambda \leq +1$ , est développable dans cet intervalle en série absolument et uniformément convergente de la forme

$$(27) \quad G(\lambda) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l g_l(\lambda), \quad \text{avec} \quad a_l = \int_{-1}^{+1} G(\lambda) \cdot g_l(\lambda) d\lambda.$$

Si l'on pose  $k = 2\pi h = 2\pi FT$ , pour abréger l'écriture, il est facile de vérifier que les *noyaux symétriques*  $A_h(\lambda - \mu) = \frac{\sin k(\lambda - \mu)}{\pi(\lambda - \mu)}$ ,  $\sqrt{h} \cos k\lambda\mu$  et  $\sqrt{h} \sin k\lambda\mu$  des équations intégrales (14), (15) et (19), respectivement, sont solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$(28) \quad D_\lambda \Omega(\lambda, \mu) = D_\mu \Omega(\lambda, \mu),$$

$$\text{c'est-à-dire} \quad (\lambda^2 - 1) \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \lambda^2} + 2\lambda \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} + k^2 \lambda^2 \Omega = (\mu^2 - 1) \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \mu^2} + 2\mu \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} + k^2 \mu^2 \Omega.$$

Cette équation n'est autre que l'équation des ondes

$$\Delta \Omega + k^2 \Omega = 0,$$

écrite en coordonnées homofocales pour une fonction  $\Omega$  présentant une symétrie de révolution (cf. Annexe I).

[Pour qu'une fonction de la forme  $\omega(\lambda, \mu) \equiv U(\lambda) \cdot V(\mu)$  soit solution de l'équation aux dérivées partielles (28), il faut et il suffit que les deux fonctions  $U(\lambda)$  et  $V(\lambda)$  soient deux intégrales, distinctes ou non, de la même équation différentielle (24), correspondant à la même valeur, d'ailleurs quelconque, du paramètre  $C$ .

$$\text{Alors} \quad D_\lambda \omega(\lambda, \mu) = D_\mu \omega(\lambda, \mu) = C \omega(\lambda, \mu). ]$$

**B)** Considérons d'autre part une équation intégrale linéaire et homogène

$$(29) \quad G(\lambda) = \frac{1}{K} \int_{-1}^{+1} \Omega(\lambda, \mu) \cdot G(\mu) d\mu,$$

où  $\Omega(\lambda, \mu)$  est un noyau symétrique, solution de l'équation aux dérivées partielles (28), et dont toutes les valeurs propres  $1/K_i$  sont distinctes, ce qui signifie qu'à chaque valeur propre  $1/K_m$  est associée une seule fonction propre normée  $\psi_m(\lambda)$ . Le noyau  $\Omega(\lambda, \mu)$  est de plus supposé fonction deux fois dérivable et bornée de  $\lambda$  et de  $\mu$  dans le domaine fermé  $-1 \leq \lambda \leq +1$ ,  $-1 \leq \mu \leq +1$ .

Alors, quelle que soit la fonction  $G(\mu)$  deux fois dérivable et bornée dans l'intervalle fermé  $-1 \leq \mu \leq +1$ ,

$$(30) \quad D_\lambda \int_{-1}^{+1} \Omega(\lambda, \mu) \cdot G(\mu) d\mu = \int_{-1}^{+1} \Omega(\lambda, \mu) [D_\mu G(\mu)] d\mu.$$

$$\text{En effet} \quad D_\lambda \int_{-1}^{+1} \Omega(\lambda, \mu) \cdot G(\mu) d\mu = \int_{-1}^{+1} [D_\lambda \Omega(\lambda, \mu)] G(\mu) d\mu = \int_{-1}^{+1} [D_\mu \Omega(\lambda, \mu)] G(\mu) d\mu.$$

Il suffit donc de montrer que, quelles que soient les fonctions  $F(\mu)$  et  $G(\mu)$ , deux fois dérivables et bornées dans l'intervalle fermé  $-1 \leq \mu \leq +1$ ,

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d}{d\mu} \left[ (\mu^2 - 1) \frac{dF(\mu)}{d\mu} \right] \cdot G(\mu) d\mu = \int_{-1}^{+1} F(\mu) \frac{d}{d\mu} \left[ (\mu^2 - 1) \frac{dG(\mu)}{d\mu} \right] d\mu,$$

ce qui résulte immédiatement d'une double intégration par parties, puisque

$$(\mu^2 - 1) G(\mu) \frac{dF(\mu)}{d\mu} \quad \text{et} \quad (\mu^2 - 1) F(\mu) \frac{dG(\mu)}{d\mu} \quad \text{sont nuls pour } \mu = \pm 1.$$

**C)** Cela étant posé, soit  $\psi_m(\lambda)$  une fonction propre du noyau  $\Omega(\lambda, \mu)$ , associée à la valeur propre  $1/K_m$ :

$$\psi_m(\lambda) = \frac{1}{K_m} \int_{-1}^{+1} \Omega(\lambda, \mu) \cdot \psi_m(\mu) d\mu.$$

$\psi_m(\lambda)$  étant, comme  $\Omega(\lambda, \mu)$ , une fonction deux fois dérivable et bornée dans l'intervalle fermé  $-1 \leq \lambda \leq +1$ , la relation (30) est applicable à  $\psi_m(\mu)$  et montre que

$$D_\lambda \psi_m(\lambda) = \frac{1}{K_m} \int_{-1}^{+1} \Omega(\lambda, \mu) [D_\mu \psi_m(\mu)] d\mu.$$

Donc  $D_\lambda \psi_m(\lambda)$  est, comme  $\psi_m(\lambda)$ , une fonction propre du noyau  $\Omega(\lambda, \mu)$ , associée à la même valeur propre  $1/K_m$ , et par suite

$$D_\lambda \psi_m(\lambda) = C_m \psi_m(\lambda),$$

où  $C_m$  est un facteur constant.

Ainsi, chacune des fonctions propres  $\psi_m(\lambda)$  du noyau  $\Omega(\lambda, \mu)$  est une solution bornée d'une équation différentielle (24), correspondant à une valeur  $C_m$  convenablement choisie du paramètre constant  $C$ .

[Cela revient à dire que tous les produits  $\psi_l(\lambda) \cdot \psi_l(\mu)$  sont, comme le noyau  $\Omega(\lambda, \mu)$ , solutions de l'équation aux dérivées partielles (28).]

Réciproquement, soit  $g_n(\lambda)$  une solution bornée d'une équation différentielle (24), correspondant à la valeur  $C_n$  du paramètre constant  $C$  :

$$D_\lambda g_n(\lambda) = C_n g_n(\lambda).$$

La relation (30) est applicable à  $g_n(\mu)$  et montre que

$$D_\lambda \int_{-1}^{+1} \Omega(\lambda, \mu) \cdot g_n(\mu) d\mu = C_n \int_{-1}^{+1} \Omega(\lambda, \mu) \cdot g_n(\mu) d\mu.$$

Donc  $\int_{-1}^{+1} \Omega(\lambda, \mu) \cdot g_n(\mu) d\mu$  est, comme  $g_n(\lambda)$ , une solution de l'équation différentielle (24), pour la même valeur  $C_n$  du paramètre constant  $C$ , et il en est de même de toutes les transformées successives de  $g_n(\lambda)$  par les noyaux itérés de  $\Omega(\lambda, \mu)$ . D'autre part  $\int_{-1}^{+1} \Omega(\lambda, \mu) \cdot g_n(\mu) d\mu$  reste bornée, comme  $g_n(\lambda)$ , aux points  $\lambda = \pm 1$ , et par suite

$$\text{— ou bien } \int_{-1}^{+1} \Omega(\lambda, \mu) \cdot g_n(\mu) d\mu = 0;$$

$$\text{— ou bien } \int_{-1}^{+1} \Omega(\lambda, \mu) \cdot g_n(\mu) d\mu = K_n g_n(\lambda),$$

où  $K_n$  est un facteur constant.

Ainsi, chacune des solutions bornées  $g_n(\lambda)$  des équations différentielles (24) est, soit orthogonale au noyau  $\Omega(\lambda, \mu)$ , soit fonction propre de ce noyau, associée à une valeur propre  $1/K_n$ .

Il résulte de ces deux propriétés que, dans le cas général, l'ensemble des solutions bornées des équations différentielles (24) contient l'ensemble des solutions des équations intégrales (29).

Il en est ainsi pour les équations intégrales (15) et (19), dont les noyaux sont respectivement  $\sqrt{FT} \cos(2\pi FT \lambda \mu)$  et  $\sqrt{FT} \sin(2\pi FT \lambda \mu)$ .

D) Dans le cas particulier important où le noyau  $\Omega(\lambda, \mu)$  est « fermé », il est, par définition, exclu qu'une fonction  $g_n(\lambda)$  deux fois dérivable, bornée et non identiquement nulle dans l'intervalle fermé  $-1 \leq \lambda \leq +1$ , soit orthogonale à  $\Omega(\lambda, \mu)$ ; ou, ce qui revient au même, la suite des fonctions propres  $\psi_l(\lambda)$ , supposées normées  $\left\{ \int_{-1}^{+1} [\psi_l(\lambda)]^2 d\lambda = 1 \right\}$ , du noyau  $\Omega(\lambda, \mu)$  forme un système orthonormé complet.

Dans ce cas, et dans ce cas seulement [d'après ce qui a été dit de la suite des solutions bornées  $g_l(\lambda)$ , supposées normées, des équations (24)], il y a identité entre l'ensemble des solutions bornées des équations différentielles (24) et l'ensemble des solutions des équations intégrales (29).

Or il est possible de montrer que le noyau symétrique  $A_{FT}(\lambda - \mu) = \frac{\sin 2\pi FT(\lambda - \mu)}{\pi(\lambda - \mu)}$  de l'équation intégrale (14) est fermé. Cela résulte d'ailleurs, d'après ce qui précède, de la vérification directe (qui sera faite au § 6.3) du fait que toute solution bornée des équations différentielles (24) est fonction propre du noyau  $A_{FT}(\lambda - \mu)$  ou, ce qui revient au même (cf. chap. III *in fine*), de l'un ou de l'autre des noyaux  $\sqrt{FT} \cos(2\pi FT \lambda \mu)$  et  $\sqrt{FT} \sin(2\pi FT \lambda \mu)$ .

E) Ainsi, l'ensemble des solutions des équations intégrales (14), réunion de l'ensemble des solutions (paires) des équations intégrales (15), et de l'ensemble des solutions (impaires) des équations intégrales (19), est identique à l'ensemble des solutions bornées des équations différentielles (24).

Ce résultat important permet de déterminer complètement les solutions des équations intégrales (14), ainsi que les valeurs propres correspondantes, à partir des équations différentielles (24). [C'est ce que nous ferons au chap. VI.]

Il est évidemment possible de ranger les fonctions propres  $\psi_l(\lambda)$ , supposées normées, du noyau fermé  $A_{FT}(\lambda - \mu)$  dans un ordre tel que la suite des  $\psi_l(\lambda)$  soit identique à la suite des solutions bornées  $g_l(\lambda)$ , supposées normées, des équations (24). [Nous verrons au § 6.3 que cet ordre, qui est celui des constantes de séparation  $C_l$  croissantes, est aussi celui des valeurs propres  $1/K_l$  croissantes.]

Alors :

$$(31) \quad \psi_l(\lambda) \equiv g_l(\lambda), \quad \text{quel que soit } l.$$

C'est ce que nous supposons dans la suite.

### V. — RENDEMENT ÉNERGÉTIQUE DU FILTRAGE D'UN SIGNAL $\sigma(t)$ DE DURÉE FINIE, DANS UN CAS GÉNÉRAL.

Considérons un signal  $\sigma(t)$  limité à l'intervalle de temps  $(-T, +T)$ , deux fois dérivable et borné dans cet intervalle fermé.

D'après la formule (27), compte tenu de (31), un tel signal peut être représenté, dans l'intervalle  $(-T, +T)$  où il n'est pas nul, par la série absolument et uniformément convergente

$$(32) \quad \sigma(t) \equiv G\left(\frac{t}{T}\right) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \psi_l\left(\frac{t}{T}\right),$$

où les  $a_l$  sont les coefficients constants  $a_l = \frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} \sigma(t) \cdot \psi_l\left(\frac{t}{T}\right) dt$ , et où les fonctions  $\psi_l(\lambda)$  sont

les fonctions propres normées du noyau symétrique fermé  $A_{FT}(\lambda - \mu) = \frac{\sin 2\pi FT(\lambda - \mu)}{\pi(\lambda - \mu)}$ . [Rap-  
pelons que les fonctions  $\psi_l(\lambda)$  sont identiques aux solutions bornées normées  $g_l(\lambda)$  des équations différentielles (24), qui forment un système orthonormé complet.] A ces fonctions  $\psi_l(\lambda)$  sont respectivement associées les valeurs propres  $1/K_l$  du noyau  $A_{FT}(\lambda - \mu)$ , toutes supérieures à 1 et rangées par ordre croissant.

Le signal  $\Sigma(t)$ , déduit de  $\sigma(t)$  par le filtrage (1) qui limite son spectre à l'intervalle de fréquence  $(-F, +F)$ , est alors défini dans l'intervalle  $(-T, +T)$  par la série absolument et uniformément convergente

$$(33) \quad \Sigma(t) \equiv \int_{-1}^{+1} A_{FT}\left(\frac{t}{T} - \mu\right) \cdot \sigma(T\mu) d\mu = \sum_{l=0}^{\infty} a_l K_l \psi_l\left(\frac{t}{T}\right),$$

obtenue par l'application du filtrage (1) à chacun des termes de la série (32).

$$\text{D'autre part,} \quad \frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} \sigma^2(t) dt = \sum_{l=0}^{\infty} a_l^2,$$

$$\text{et, d'après (3),} \quad \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \Sigma^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} \Sigma(t) \cdot \sigma(t) dt = \sum_{l=0}^{\infty} a_l^2 K_l.$$

Le rendement énergétique  $K = 1 - \epsilon$  de la transformation  $\sigma(t) \rightarrow \Sigma(t)$ , qui coupe toutes les fréquences supérieures à  $F$  dans le spectre du signal  $\sigma(t)$  de durée finie  $2T$ , a donc pour valeur, dans ce cas général,

$$(34) \quad K = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \Sigma^2(t) dt}{\int_{-T}^{+T} \sigma^2(t) dt} = \frac{\sum_{l=0}^{\infty} a_l^2 K_l}{\sum_{l=0}^{\infty} a_l^2}.$$

Ainsi, le rendement énergétique  $K = 1 - \epsilon$  que l'on obtient en faisant passer un signal  $\sigma(t)$  de durée finie  $2T$  à travers un filtre passe-bas présentant une coupure brusque à la fréquence  $F$  est, en général, égal à une moyenne pondérée des nombres  $K_l$ , inverses des valeurs propres du noyau symétrique fermé  $A_{FT}(\lambda - \mu)$ , ces nombres, tous compris entre 0 et 1, étant respectivement affectés des poids positifs  $a_l^2 = \left[ \int_{-1}^{+1} \sigma(T\lambda) \cdot \psi_l(\lambda) d\lambda \right]^2$ .

On vérifie bien que ce rendement  $K$  atteint son maximum absolu  $K_0(F, T)$ , égal à l'inverse de la plus petite des valeurs propres du noyau  $A_{FT}(\lambda - \mu)$ , quand le signal  $\sigma(t)$ , limité à l'intervalle de temps  $(-T, +T)$ , est proportionnel dans cet intervalle à la fonction  $\psi_0\left(\frac{t}{T}\right)$ ,  $\psi_0(\lambda)$  étant celle des fonctions propres du noyau  $A_{FT}(\lambda - \mu)$  qui est associée à la plus petite valeur propre  $1/K_0$ .

Nous verrons au § 6.3 que le signal ainsi défini, de durée finie et d'énergie filtrée maximum, est un signal pair  $s(t)$ . La fonction  $\psi_0(\lambda)$  est donc une fonction propre du noyau  $\sqrt{FT} \cos(2\pi FT \lambda \mu)$ , et l'on aurait été conduit à définir le même signal  $s(t)$  si l'on avait considéré les seuls signaux  $\sigma(t)$  pairs.

Si l'on considère, au contraire, les seuls signaux  $\sigma(t)$  impairs, seuls sont différents de zéro, dans la série (32), les termes contenant les fonctions  $\psi_l\left(\frac{t}{T}\right)$  impaires, c'est-à-dire celles qui correspondent aux fonctions propres  $\psi_l(\lambda)$  du noyau  $\sqrt{FT} \sin(2\pi FT \lambda \mu)$ .

On est ainsi conduit à définir un signal impair  $s_1(t)$ , de durée finie et d'énergie filtrée maximum, parmi tous les signaux  $\sigma(t)$  impairs. Ce signal  $s_1(t)$  et le rendement énergétique  $K_1(F, T)$  qui lui correspond sont définis à partir du noyau  $\sqrt{FT} \sin(2\pi FT \lambda \mu)$ , comme le signal pair  $s(t)$  et le rendement  $K_0(F, T)$  sont définis à partir du noyau  $A_{FT}(\lambda - \mu) = \frac{\sin 2\pi FT(\lambda - \mu)}{\pi(\lambda - \mu)}$  ou du noyau  $\sqrt{FT} \cos(2\pi FT \lambda \mu)$ .

[Nous déterminerons le signal  $s_1(t)$  et le rendement  $K_1(F, T)$ , en même temps que le signal  $s(t)$  et le rendement  $K_0(F, T)$ , à la fin du § 6.3.]

## VI. — DÉTERMINATION DU SIGNAL PAIR $s(t)$ , DU SIGNAL IMPAIR $s_1(t)$ , ET DES RENDEMENTS $K_0(k)$ ET $K_1(k)$ CORRESPONDANTS.

Les équations différentielles (24), qui se présentent dans l'étude de la décomposition de l'équation des ondes en coordonnées homofocales, ont fait l'objet d'une théorie complète (voir, par exemple, [3] § 11.3, pp. 1502 sqq.). La détermination numérique de leurs solutions bornées  $G_l(k, \lambda)$ , et des valeurs discrètes  $C_l(k)$  du paramètre  $C$  auxquelles correspondent ces solutions, a d'autre part été abordée par quelques auteurs [4].

### 6.1. Premier mode de représentation des fonctions $G_l(k, \lambda)$ .

Les fonctions  $G_l(k, \lambda)$ , solutions bornées des équations différentielles (24), peuvent d'abord être représentées, pour  $|\lambda| \leq 1$ , par un développement en série rapidement convergente

$$(35) \quad G_l(k, \lambda) = \sum_n' d_n(k, l) \cdot P_n(\lambda).$$

Dans cette formule, le paramètre  $k = 2\pi FT$  peut prendre une valeur positive quelconque, le rang  $l$  de la solution bornée considérée peut prendre les valeurs entières successives  $0, 1, 2, \dots$ , les coefficients  $d_n(k, l)$  sont des constantes qui ont été tabulées pour  $k \leq 5$  et  $l = 0, 1, 2, 3$  [4]; enfin les fonctions  $P_n(\lambda)$  sont les polynômes de Legendre ([3] § 6.3, p. 749), de degrés respectifs  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , et de même parité que leur degré.

D'ailleurs,  $d_n(k, l)$  est nul si  $(n + l)$  est impair, de sorte que la sommation  $\sum_n'$  s'étend seulement aux valeurs paires de  $n$  à partir de  $n = 0$  quand  $l$  est pair, et aux valeurs impaires de  $n$  à partir de  $n = 1$  quand  $l$  est impair.

Il en résulte que les solutions bornées  $G_l(k, \lambda)$  des équations différentielles (24) sont des fonctions alternativement paires et impaires de  $\lambda$ , suivant la parité de leur rang  $l$ , conformément aux résultats obtenus au chapitre III.

Les polynômes de Legendre  $P_n(\lambda)$  sont définis par la relation :

$$(36) \quad P_n(\lambda) \equiv \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n (\lambda^2 - 1)^n}{d\lambda^n} \quad [P_n(1) = 1].$$

Ils vérifient les relations d'orthogonalité

$$(37) \quad \int_{-1}^{+1} P_m(\lambda) \cdot P_n(\lambda) d\lambda = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1}, & \text{si } m = n, \end{cases}$$

les relations de récurrence

$$(38) \quad (2n+1) \int_{-1}^{\lambda} P_n(\mu) d\mu = -P_{n-1}(\lambda) + P_{n+1}(\lambda),$$

$$(39) \quad (2n+1)\lambda P_n(\lambda) = n P_{n-1}(\lambda) + (n+1) P_{n+1}(\lambda),$$

et l'équation différentielle

$$(40) \quad \frac{d}{d\lambda} \left[ (\lambda^2 - 1) \frac{dP_n(\lambda)}{d\lambda} \right] - n(n+1) P_n(\lambda) = 0.$$

On déduit alors des équations différentielles (24) et (40) et du développement (35), compte tenu de (37) et (39), les relations

$$(41) \quad k^2 \left[ \frac{(n-1)n}{(2n-3)(2n-1)} d_{n-2} + \frac{2n^2+2n-1}{(2n-1)(2n+3)} d_n + \frac{(n+1)(n+2)}{(2n+3)(2n+5)} d_{n+2} \right] = [C - n(n+1)] d_n$$

qui déterminent la suite des coefficients  $d_n(k, l)$ , non tous nuls et tendant vers 0 quand  $n$  croît indéfiniment, pourvu que la constante de séparation  $C$  soit égale à l'une des valeurs discrètes  $C_l(k)$ , rangées par ordre croissant à partir de la plus petite d'entre elles  $C_n$ , et croissant indéfiniment avec le rang  $l$ .

Les coefficients  $d_n$  de cette suite ne sont ainsi déterminés qu'à un facteur arbitraire près. Il est commode de choisir ce facteur de telle manière que

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} G_l(k, 0) = P_l(0) = (-1)^{\frac{l}{2}} \frac{l!}{2^l \left(\frac{l}{2}\right)!^2}, \quad \text{si } l \text{ est pair;} \\ G_l(k, 0) = \left[ \frac{d G_l(k, \lambda)}{d \lambda} \right]_{\lambda=0} = \left[ \frac{d P_l(\lambda)}{d \lambda} \right]_{\lambda=0} = (-1)^{\frac{l-1}{2}} \frac{l!}{2^{l-1} \left(\frac{l-1}{2}\right)!^2}, \quad \text{si } l \text{ est impair.} \end{array} \right.$$

C'est ce qui est fait dans les tables [4] auxquelles nous empruntons les valeurs de  $C_l(k)$  et de  $d_n(k, l)$  figurant dans les tableaux 0 et I de l'Annexe II, relatifs respectivement à  $l = 0$  [ $G_0(k, 0) = 1$ ], et à  $l = 1$  [ $G_1(k, 0) = 1$ ].

Nous supposerons dans la suite que les relations (42) sont vérifiées, ce qui fixe les valeurs des coefficients  $d_n(k, l)$  et complète la définition des fonctions  $G_l(k, \lambda)$ .

### 6.2. Second mode de représentation des fonctions $G_l(k, \lambda)$ .

Les fonctions  $G_l(k, \lambda)$ , solutions bornées des équations différentielles (24), peuvent d'autre part être représentées, quel que soit  $\lambda$ , par un développement en série convergente de la forme

$$(43) \quad G_l(k, \lambda) = \rho_l(k) \frac{1}{\sum_n d_n(k, l)} \sum_n (-1)^{\frac{n-l}{2}} d_n(k, l) \cdot j_n(k\lambda).$$

Dans cette formule,  $\rho_l(k)$  est un facteur de proportionnalité indépendant de  $\lambda$ , les coefficients  $d_n(k, l)$  sont les mêmes constantes que dans la formule (35), et les fonctions  $j_n$  de l'argument  $k\lambda$  sont les fonctions de Bessel sphériques ([3], p. 1465 et p. 1573) définies par la relation :

$$(44) \quad j_n(z) \equiv \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{n+\frac{1}{2}}(z) \equiv (-z)^n \left( \frac{d}{z dz} \right)^n \left( \frac{\sin z}{z} \right),$$

d'où l'on peut déduire ( $\Re[Z]$  désignant la partie réelle du nombre complexe  $Z$ ) :

$$(44') \quad j_n(z) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{2^n (n+p)!}{p! (2n+2p+1)!} z^{n+2p} = \Re \left[ \frac{e^{iz}}{jz} j^{-n} \sum_{q=0}^n \frac{(n+q)!}{q! (n-q)!} \left( \frac{j}{2z} \right)^q \right],$$

Ces formules entraînent les équivalences suivantes :

$$(45) \quad j_n(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{z} \sin \left( z - \frac{n\pi}{2} \right);$$

$$(46) \quad j_n(z) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} \frac{2^n n!}{(2n+1)!} z^n = \frac{z^n}{1.3.5 \dots (2n+1)}.$$

De plus, les fonctions  $j_n(z)$  vérifient les relations d'orthogonalité

$$(47) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} j_m(z) \cdot j_n(z) dz = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n, \\ \frac{\pi}{2n+1}, & \text{si } m = n, \end{cases}$$

les relations de récurrence

$$(48) \quad (2n+1) \frac{j_n(z)}{z} = j_{n-1}(z) + j_{n+1}(z),$$

$$(49) \quad (2n+1) \frac{d j_n(z)}{dz} = n j_{n-1}(z) - (n+1) j_{n+1}(z),$$

et l'équation différentielle

$$(50) \quad \frac{d}{dz} \left[ z^2 \frac{d j_n(z)}{dz} \right] + z^2 j_n(z) - n(n+1) j_n(z) = 0.$$

En posant  $z = k\lambda$ , on retrouve alors les relations (41) entre les coefficients  $d_n(k, l)$ , à partir des équations différentielles (24) et (50) et du développement (43), compte tenu de (47) et (49). Cela établit que les coefficients  $d_n(k, l)$  sont bien les mêmes dans les deux développements (35) et (43) des fonctions  $G_l(k, \lambda)$ , solutions bornées des équations différentielles (24).

Quant au facteur de proportionnalité  $\rho_l(k)$ , sa valeur s'obtient immédiatement si l'on fait  $\lambda = 0$  dans le développement (43), en tenant compte de (46) :

$$(51) \quad \rho_l(k) = \begin{cases} (-1)^{\frac{l}{2}} \frac{\sum_n' d_n(k, l)}{d_0(k, l)} G_l(k, 0), & \text{si } l \text{ est pair,} \\ (-1)^{\frac{l-1}{2}} \frac{3}{k} \frac{\sum_n' d_n(k, l)}{d_1(k, l)} \left[ \frac{d G_l(k, \lambda)}{d \lambda} \right]_{\lambda=0}, & \text{si } l \text{ est impair.} \end{cases}$$

Les valeurs de  $G_l(k, 0)$  pour  $l$  pair, et de  $\left[ \frac{d G_l(k, \lambda)}{d \lambda} \right]_{\lambda=0}$  pour  $l$  impair, sont d'ailleurs définies par les relations (42).

Le développement (43) permet en particulier de préciser, compte tenu de (45), le comportement asymptotique des fonctions  $G_l(k, \lambda)$  pour les grandes valeurs de la variable  $\lambda$  :

$$(52) \quad G_l(k, \lambda)_{\lambda \rightarrow \infty} \sim \rho_l(k) j_l(k\lambda)_{\lambda \rightarrow \infty} \sim \rho_l(k) \frac{1}{k\lambda} \sin\left(k\lambda - \frac{l\pi}{2}\right).$$

### 6.3. Détermination des rendements $K_l(k)$ à partir des deux représentations des fonctions $G_l(k, \lambda)$ . Signaux $s(l)$ et $s_1(l)$ .

Les formules (36) et (44), qui définissent les polynômes de Legendre  $P_n(\lambda)$  et les fonctions de Bessel sphériques  $j_n(z)$ , permettent d'établir par récurrence la relation suivante entre ces fonctions :

$$(53) \quad \int_{-1}^{+1} e^{jz\mu} P_n(\mu) d\mu = 2 j^n \cdot j_n(z).$$

D'après cette relation, les formules (47) à (50) résultent des formules (37) à (40).

On en déduit encore très simplement, à l'aide des deux développements (35) et (43), et en posant  $z = k\lambda$ , que les fonctions  $G_l(k, \lambda)$ , solutions bornées des équations différentielles (24), sont aussi solutions des équations intégrales linéaires et homogènes

$$(54) \quad \int_{-1}^{+1} e^{jk\lambda\mu} G_l(k, \mu) d\mu = 2 j^l \frac{\sum_n' d_n(k, l)}{\rho_l(k)} G_l(k, \lambda),$$

ou encore, suivant la parité de  $l$ , et compte tenu de la valeur (51) de  $\rho_l(k)$ ,

$$(55) \quad \int_{-1}^{+1} \cos(k\lambda\mu) \cdot G_l(k, \mu) d\mu = 2 \frac{d_0(k, l)}{G_l(k, 0)} G_l(k, \lambda), \quad \text{si } l \text{ est pair,}$$

$$(56) \quad \int_{-1}^{+1} \sin(k\lambda\mu) \cdot G_l(k, \mu) d\mu = \frac{2k}{3} \frac{d_1(k, l)}{G_l'(k, 0)} G_l(k, \lambda), \quad \text{si } l \text{ est impair.}$$

La relation (55) montre que, pour  $l$  pair, la fonction  $G_l(k, \lambda)$  est solution de l'équation intégrale (15) quand le coefficient  $H_r$  y prend la valeur

$$(57) \quad H_{r,l}(k) = \sqrt{\frac{2k}{\pi}} \frac{d_0(k, l)}{G_l(k, 0)} = (-1)^{\frac{l}{2}} \sqrt{\frac{2k}{\pi}} \frac{\sum_{p=0}^{\infty} d_{2p}(k, l)}{\rho_l(k)}.$$

La relation (56) montre que, pour  $l$  impair, la fonction  $G_l(k, \lambda)$  est solution de l'équation intégrale (19) quand le coefficient  $H_r$  y prend la valeur

$$(58) \quad H_{r,l}(k) = \sqrt{\frac{2k}{\pi}} \frac{k}{3} \frac{d_1(k, l)}{G_l'(k, 0)} = (-1)^{\frac{l-1}{2}} \sqrt{\frac{2k}{\pi}} \frac{\sum_{p=0}^{\infty} d_{2p+1}(k, l)}{\rho_l(k)}.$$

On en déduit, d'après les résultats obtenus au chapitre III, que toute solution bornée  $G_l(k, \lambda)$  de l'équation différentielle (24) est solution de l'équation intégrale (14) quand le coefficient  $K$  y prend la valeur

$$(59) \quad K_l(k) = \begin{cases} \left[ H_{r_l}(k) \right]^2 = \frac{2k}{\pi} \left[ \frac{d_0(k, l)}{G_l(k, 0)} \right]^2, & \text{si } l \text{ est pair,} \\ \left[ H_{l_l}(k) \right]^2 = \frac{2k}{\pi} \left[ \frac{k d_1(k, l)}{3 G_l(k, 0)} \right]^2, & \text{si } l \text{ est impair,} \end{cases}$$

ce que l'on peut écrire sous les formes équivalentes :

$$(59') \quad K_l(k) = \frac{2k}{\pi} \left[ \frac{\sum_n' d_n(k, l)}{\rho_l(k)} \right]^2 = \frac{2k}{\pi} \left[ \frac{\sum_n' (-1)^{\frac{n-l}{2}} d_n(k, l) j_n(k)}{\sum_n' d_n(k, l)} \right]^2.$$

Ainsi se trouvent vérifiés directement les résultats, obtenus au chapitre IV, sur les relations entre les équations intégrales (14), (15) et (19), et l'équation différentielle (24).

De plus, les formules (59) donnent les valeurs propres  $\frac{1}{K_l(k)}$  respectivement associées aux fonctions propres  $G_l(k)$  du noyau symétrique fermé  $\frac{\sin k(\lambda - \mu)}{\pi(\lambda - \mu)}$ .

Le développement de ce noyau en série de fonctions propres est ainsi complètement déterminé, d'après (35), (43) et (59), et suivant la formule (23) qui permet d'écrire, avec  $k = 2\pi FT$ ,

$$(60) \quad \Lambda_{rr}(\lambda - \mu) = \frac{\sin k(\lambda - \mu)}{\pi(\lambda - \mu)} = \sum_{l=0}^{\infty} K_l(k) \frac{G_l(k, \lambda) \cdot G_l(k, \mu)}{\Lambda_l(k)},$$

où  $\Lambda_l(k) = \int_{-1}^{+1} [G_l(k, \lambda)]^2 d\lambda = \sum_n' \frac{2}{2n+1} [d_n(k, l)]^2$ , d'après (35) et (37).

Le coefficient  $K_l(k)$  est le rendement énergétique du filtrage par lequel le signal  $G_l(k, \frac{t}{T})$ , limité à l'intervalle de temps  $(-T, +T)$ , est transformé en le signal  $K_l(k) G_l(k, \frac{t}{T})$ , de durée infinie mais dont le spectre est limité à l'intervalle de fréquence  $(-F, +F)$ , avec  $2\pi FT = k$ .

D'ailleurs, ce rendement  $K_l(k)$ , donné par (59), est fonction décroissante du rang  $l$  qui indique, d'après ce qui a été dit au chapitre IV, le nombre des zéros présentés par le signal  $G_l(k, \frac{t}{T})$  dans l'intervalle  $-T < t < +T$ .

Ainsi, d'après (35) et (43), compte tenu de (42) et (51), le signal  $s(t)$  cherché, de durée finie  $2T$  et d'énergie filtrée maximum dans la bande de fréquences  $|f| < F$ , est le signal pair

$$(61) \quad s(t) \equiv c G_0\left(k, \frac{t}{T}\right) = c \sum_{p=0}^{\infty} d_{2p}(k, 0) \cdot P_{2p}\left(\frac{t}{T}\right) = \frac{c}{d_0(k, 0)} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p d_{2p}(k, 0) \cdot j_{2p}\left(k \frac{t}{T}\right),$$

pour  $-T < t < +T$ ,  $c$  étant un facteur constant arbitraire.

Le spectre réel  $\varphi(f)$  du signal pair  $s(t)$  est défini, d'après (18) et (57), compte tenu de (42), par

$$(62) \quad \varphi(f) \equiv c \sqrt{\frac{T}{F}} \sqrt{\frac{2k}{\pi}} d_0(k, 0) \cdot G_0\left(k, \frac{f}{F}\right), \quad \text{pour toute fréquence } f.$$

Et le rendement énergétique maximum, correspondant au filtrage du signal  $s(t)$ , est défini, d'après (59), compte tenu de (42), en fonction croissante du paramètre  $k = 2\pi FT$ , par

$$(63) \quad K_0(k) = [H_0(k)]^2 = \frac{2k}{\pi} [d_0(k, 0)]^2.$$

2) Le développement (60) du noyau  $\frac{\sin k(\lambda - \mu)}{\pi(\lambda - \mu)}$  peut aussi être obtenu, mais d'une façon moins élémentaire, à partir du développement de la fonction de Green  $\frac{e^{jk/P_0 P_1}}{|P_0 P_1|}$  ( $P_0$  étant un point fixe,  $P$  étant le point courant, et  $|P, P_1|$  désignant la distance de ces deux points) attachée à l'équation des ondes en coordonnées homofocales ([3] pp. 825 sqq. et p. 1507), ce qui donne une autre méthode pour déterminer à la fois les fonctions propres  $G_l(k, \lambda)$  et les valeurs propres  $\frac{1}{K_l(k)}$  de ce noyau, qui est identique au coefficient de  $j$  dans  $\frac{1}{\pi} \frac{e^{jk(\lambda - \mu)}}{\lambda - \mu}$ .

Il est, d'autre part, intéressant de déterminer le signal impair  $s_1(t)$ , de durée finie  $2T$ , et d'énergie filtrée maximum dans la bande de fréquences  $|f| < F$  (cf. chap. V). D'après (35) et (43), compte tenu de (42) et (51), c'est le signal impair

$$(64) \quad s_1(t) \equiv c G_1\left(k, \frac{t}{T}\right) = c \sum_{p=0}^{\infty} d_{2p+1}(k, 1) \cdot P_{2p+1}\left(\frac{t}{T}\right) = \frac{3}{k} \frac{c}{d_1(k, 1)} \sum_{p=0}^{\infty} d_{2p+1}(k, 1) \cdot j_{2p+1}\left(k \frac{t}{T}\right),$$

pour  $-T < t < +T$ ,  $c$  étant un facteur constant arbitraire.

Le spectre imaginaire pur  $\varphi_1(f)$  du signal impair  $s_1(t)$  est défini, d'après (22) et (58), compte tenu de (42), par

$$(65) \quad \varphi_1(f) \equiv -j c \sqrt{\frac{T}{F}} \sqrt{\frac{2k^3}{9\pi}} d_1(k, 1) G_1\left(k, \frac{f}{F}\right), \quad \text{pour toute fréquence } f.$$

[Il faut remarquer que ce spectre ne contient pas la fréquence nulle.]

Et le rendement énergétique correspondant au filtrage du signal  $s_1(t)$ , c'est-à-dire le plus grand rendement possible pour le filtrage d'un signal impair, est défini, d'après (59), compte tenu de (42), en fonction croissante du paramètre  $k = 2\pi FT$ , par

$$(66) \quad K_1(k) = [H_1(k)]^2 = \frac{2k^3}{9\pi} [d_1(k, 1)]^2.$$

Nous avons fait figurer les valeurs respectives des rendements énergétiques  $K_0(k)$  et  $K_1(k)$ , calculés à partir des formules (63) et (66), dans les tableaux 0 et I de l'Annexe II.

Et nous avons tracé sur la *fig. 1* les deux courbes représentant les variations des rendements  $K_0(k)$  et  $K_1(k)$  en fonction du paramètre  $k = 2\pi FT$ .

Nous avons donné, d'autre part, dans les tableaux II et III, quelques valeurs des fonctions  $G_0(k, \lambda)$  et  $G_1(k, \lambda)$ , calculées à partir du développement (35) [explicité dans la première partie des formules (61) et (64)], pour  $0 \leq \lambda \leq 1$  et  $k = 1, 2, 3, 4, 5$ .

Et nous avons tracé, sur les *fig. 2 et 3*, les courbes représentant les variations respectives de  $G_0(k, \lambda)$  et de  $G_1(k, \lambda)$  en fonction de  $\lambda$  dans l'intervalle  $-1 \leq \lambda \leq +1$ , pour les valeurs entières 1, 2, 3, 4, 5 du paramètre  $k = 2\pi FT$ .

#### VII. — ÉTUDE DES SIGNAUX $s(t)$ ET $s_1(t)$ POUR LES GRANDES VALEURS DU PARAMÈTRE $k = 2\pi FT$ .

La comparaison des équations différentielles (24) et (40) montre immédiatement que, lorsque le paramètre  $k$  tend vers 0, les solutions bornées  $G_l(k, \lambda)$  des équations (24) ont pour limite les polynômes de Legendre  $P_l(\lambda)$ , tandis que les constantes  $C_l(k)$  correspondantes tendent vers  $l(l+1)$ . [Cela résulte aussi très simplement du système des relations (41) qui déterminent la suite des coefficients  $d_n(k, l)$ .]

Afin d'étudier, de même, ce que deviennent les solutions bornées  $G_l(k, \lambda)$  des équations différentielles (24) lorsque le paramètre  $k$  croît indéfiniment, effectuons le changement de variable<sup>3)</sup>

$$(67) \quad \lambda \sqrt{k} = x, \quad \text{en posant } G\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right) = \mathcal{G}(x).$$

On obtient ainsi les équations différentielles

$$(24') \quad \frac{d}{dx} \left[ \left( \frac{x^2}{k} - 1 \right) \frac{d \mathcal{G}(x)}{dx} \right] + x^2 \mathcal{G}(x) = \frac{C}{k} \mathcal{G}(x).$$

Par conséquent, les solutions bornées  $G_l\left(k, \frac{x}{\sqrt{k}}\right)$  des équations (24'), obtenues pour les valeurs discrètes  $C_l(k)$  de la constante de séparation  $C$ , ont pour limite, lorsque le paramètre  $k$  croît indéfiniment, les solutions bornées  $\mathcal{G}_l(x)$  des équations différentielles

$$(68) \quad - \frac{d^2 \mathcal{G}(x)}{dx^2} + x^2 \mathcal{G}(x) = B \mathcal{G}(x),$$

et ces solutions  $\mathcal{G}_l(x)$  sont obtenues quand la constante  $B$  prend les valeurs discrètes

$$(69) \quad B_l = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{C_l(k)}{k}.$$

3) Le choix de ce changement de variable est justifié par le fait que les fonctions  $G_l\left(k, \frac{x}{\sqrt{k}}\right)$  admettent effectivement comme limite, lorsque le paramètre  $k$  croît indéfiniment, des fonctions  $\mathcal{G}_l(x)$  qui ne se réduisent pas à des constantes.

Or il est facile de vérifier que les équations (68) admettent les solutions bornées :

$$(70) \quad \varphi_l(x) = \gamma_l e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^l}{dx^l} (e^{-x^2}), \quad \text{pour } B = B_l = 2l + 1,$$

$\gamma_l$  étant un facteur constant arbitraire<sup>4)</sup>.

Les fonctions  $\varphi_l(x)$  vérifient les relations d'orthogonalité

$$(71) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m(x) \cdot \varphi_n(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n, \\ \gamma_n^2 2^n n! \sqrt{\pi}, & \text{si } m = n. \end{cases}$$

Ainsi, lorsque le paramètre  $k$  croît indéfiniment,

$$(72) \quad G_l(k) \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} (2l + 1)k,$$

et, si l'on choisit le facteur constant  $\gamma_l$  de telle manière que les relations (42) soient satisfaites,

$$(73) \quad G_l(k, \lambda) \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \varphi_l(k, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2^l \left(\frac{l}{2}\right)! k^{\frac{l}{2}}} e^{\frac{k\lambda^2}{2}} \frac{d^l}{d\lambda^l} (e^{-k\lambda^2}), & \text{si } l \text{ est pair,} \\ \frac{-1}{2^l \left(\frac{l-1}{2}\right)! k^{\frac{l-1}{2}}} e^{\frac{k\lambda^2}{2}} \frac{d^l}{d\lambda^l} (e^{-k\lambda^2}), & \text{si } l \text{ est impair.} \end{cases} \quad 5)$$

En particulier, on obtient, pour les grandes valeurs du paramètre  $k = 2\pi FT$ , les expressions limites suivantes du signal pair  $s(t)$  et du signal impair  $s_1(t)$ , de durée finie  $2T$  et d'énergie filtrée maximum dans la bande de fréquences  $|f| < F$ ,

$$(74) \quad s(t) = c G_0\left(k, \frac{t}{T}\right) \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} c e^{-\frac{k t^2}{2 T^2}}, \quad \text{avec } C = C_0(k) \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} k;$$

$$(75) \quad s_1(t) = c G_1\left(k, \frac{t}{T}\right) \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} c \frac{t}{T} e^{-\frac{k t^2}{2 T^2}}, \quad \text{avec } C = C_1(k) \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} 3k.$$

Le calcul numérique montre que les signaux  $s(t)$  et  $s_1(t)$ , limités à l'intervalle de temps  $-T \leq t \leq +T$ , sont déjà assez bien représentés par leurs formes asymptotiques (74) et (75) lorsque  $k = 5$ .

Nous avons donné, dans les tableaux II bis et III bis, quelques valeurs des fonctions  $\varphi_0(k, \lambda)$  et  $\varphi_1(k, \lambda)$ , calculées à partir de la formule (73) [explicitée en (74) et (75)], pour  $0 \leq \lambda \leq 1$  et  $k = 5, 10, 20$ .

Et nous avons tracé, sur les fig. 2 bis et 3 bis, les courbes représentant les variations respectives de  $\varphi_0(k, \lambda)$  et de  $\varphi_1(k, \lambda)$  en fonction de  $\lambda$  dans l'intervalle  $-1 \leq \lambda \leq +1$ , pour les valeurs 5, 10, 20 du paramètre  $k = 2\pi FT$ .

Il est intéressant de vérifier que les fonctions  $\varphi_l(x)$  définies par l'expression (70) sont bien solutions de l'une ou l'autre des deux équations intégrales déduites des équations (15) et (19) par le changement de variable (67), soit

$$(76) \quad \varphi_{2l}(x) = \frac{1}{H_{2l} \sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{k}}^{+\sqrt{k}} \cos(xy) \cdot \varphi_{2l}(y) dy, \quad \text{si } l \text{ est pair,}$$

$$(77) \quad \varphi_{2l+1}(x) = \frac{1}{H_{2l+1} \sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{k}}^{+\sqrt{k}} \sin(xy) \cdot \varphi_{2l+1}(y) dy, \quad \text{si } l \text{ est impair,}$$

quand on y fait tendre les limites d'intégration  $\pm \sqrt{k}$  vers  $\pm \infty$ .

<sup>4)</sup> On voit que

$$\varphi_l(x) = (-1)^l \gamma_l e^{\frac{x^2}{2}} H_l(x),$$

$H_l(x)$  étant le polynôme d'Hermite de degré  $l$  ([3] chap. 6, p. 786), défini par la relation :

$$H_l(x) = (-1)^l e^{x^2} \frac{d^l}{dx^l} (e^{-x^2}).$$

Les polynômes  $H_l(x)$  vérifient les relations de récurrence :

$$\begin{aligned} H'_n(x) &= 2n H_{n-1}(x), \\ 2x H_n(x) &= 2n H_{n-1}(x) + H_{n+1}(x), \\ H''_n(x) - 2x H'_n(x) + 2n H_n(x) &= 0. \end{aligned}$$

et l'équation différentielle

5)  $\varphi_l(k, \lambda)$  s'exprime simplement à l'aide du polynôme d'Hermite  $H_l(\lambda \sqrt{k})$  :

$$G_l(k, \lambda) \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \varphi_l(k, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2^l \left(\frac{l}{2}\right)!} e^{-\frac{k\lambda^2}{2}} H_l(\lambda \sqrt{k}), & \text{si } l \text{ est pair,} \\ \frac{1}{2^l \left(\frac{l-1}{2}\right)! \sqrt{k}} e^{-\frac{k\lambda^2}{2}} H_l(\lambda \sqrt{k}), & \text{si } l \text{ est impair.} \end{cases}$$

Cela résulte de la relation

$$(78) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jxy} e^{\frac{yx}{2}} \frac{d^l}{dy^l} (e^{-y^2}) dy = j^l \sqrt{2\pi} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^l}{dx^l} (e^{-x^2}),$$

qu'il est aisé d'établir à l'aide d'une suite de  $l$  intégrations par parties, et en remarquant que

$$\frac{d^l}{dy^l} e^{\frac{1}{2}(y+jx)^2} = \frac{1}{j^l} \frac{d^l}{dx^l} e^{\frac{1}{2}(y+jx)^2}.$$

Il est ainsi démontré que

$$(79) \quad H_{p,l}(k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} (-1)^{\frac{l}{2}}, \quad \text{si } l \text{ est pair,}$$

$$(80) \quad H_{i,l}(k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} (-1)^{\frac{l-1}{2}}, \quad \text{si } l \text{ est impair,}$$

et par suite que

$$(81) \quad K_l(k) = H_{p,l}^2(k) \text{ ou } H_{i,l}^2(k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 1, \quad \text{quel que soit } l.$$

Les relations (57) et (79), (58) et (80), compte tenu de (42), entraînent, pour les grandes valeurs du paramètre  $k = 2\pi FT$ , les équivalences suivantes :

$$(82) \quad \left\{ \begin{array}{l} d_0(k, l) \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{l!}{2^l \left(\frac{l}{2}\right)!^2} \sqrt{\frac{\pi}{2k}}, \quad \text{si } l \text{ est pair,} \\ d_1(k, l) \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{l!}{2^{l-1} \left(\frac{l-1}{2}\right)!^2} \frac{3}{k} \sqrt{\frac{\pi}{2k}}, \quad \text{si } l \text{ est impair.} \end{array} \right.$$

En particulier,

$$d_0(k, 0) \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2k}}; \quad d_1(k, 1) \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{3}{k} \sqrt{\frac{\pi}{2k}}.$$

Enfin, d'après les relations (73), (79) et (80), et d'après les formules (18) et (22) où l'on fait croître indéfiniment le paramètre  $k = 2\pi FT$ , en posant  $\sqrt{\frac{T}{F}} = \tau$  (homogène à un temps), on vérifie que le signal

$$(83) \quad S_l(t) = c e^{\pi \frac{t^2}{\tau^2}} \tau^l \frac{d^l}{dt^l} (e^{-2\pi \frac{t^2}{\tau^2}})$$

a pour spectre

$$(84) \quad \Phi_l(f) = c \frac{\tau}{j^l} e^{-\pi \tau^2 f^2} \frac{1}{\tau^l} \frac{d^l}{df^l} (e^{-2\pi \tau^2 f^2}) = \frac{\tau}{j^l} S_l(\tau^2 f),$$

quels que soient l'entier  $l$ , le paramètre positif  $\tau$ , et le facteur constant  $c$ <sup>6)</sup>.

[Il est d'ailleurs aisé d'obtenir directement ce résultat classique.]

#### VIII. — COMPLÉMENT : CAS OU LE FILTRAGE DU SIGNAL $s(t)$ EST SUIVI D'UNE LIMITATION DANS LE TEMPS.

Le problème qui vient d'être traité peut être repris dans des conditions un peu différentes.

Proposons-nous de déterminer un signal  $s(t)$ , de durée limitée à un intervalle de temps  $(-T, +T)$ , et tel que, si l'on fait passer ce signal à travers un filtre passe-bas présentant une coupure brusque à une certaine fréquence  $F$ , et si le signal filtré  $S(f)$  ainsi obtenu est lui-même limité à l'intervalle de temps  $(-T, +T)$ , la perte relative d'énergie  $\epsilon' = 1 - K'$  qui en résulte prenne la valeur  $\epsilon'_0 = 1 - K'_0$  la plus petite possible.

Il s'agit alors de choisir le signal  $s(t)$  de manière à rendre maximum le rendement énergétique

$$(85) \quad K' = \int_{-T}^{+T} S^2(f) df : \int_{-T}^{+T} s^2(t) dt,$$

<sup>6)</sup>  $S_j(t)$  et  $\Phi_j(f)$  s'expriment simplement à l'aide des polynômes d'Hermite :

$$S_l(t) = c' e^{-\pi \frac{t^2}{\tau^2}} H_l\left(\frac{t}{\tau} \sqrt{2\pi}\right),$$

$$\Phi_l(f) = c' \frac{\tau}{j^l} e^{-\pi \tau^2 f^2} H_l(\tau / \sqrt{2\pi}) = \frac{\tau}{j^l} S_l(\tau^2 f),$$

$$\text{avec } c' = (-\sqrt{2\pi})^l c.$$

le signal filtré  $S(t)$  étant encore donné par la relation

$$(1) \quad S(t) = \int_{-T}^{+T} A_F(t-\tau) \cdot s(\tau) d\tau, \quad \text{avec} \quad A_h(x) = \frac{\sin(2\pi h x)}{\pi x}.$$

D'ailleurs

$$(86) \quad \int_{-T}^{+T} S^2(t) dt = \int_{-T}^{+T} \int_{-T}^{+T} S(t) \cdot A_F(t-\tau) \cdot s(\tau) dt d\tau = \int_{-T}^{+T} S_2(t) \cdot s(t) dt,$$

si l'on désigne par  $S_2(t)$  le signal doublement filtré

$$(87) \quad S_2(t) = \int_{-T}^{+T} A_F(t-\theta) \cdot S(\theta) d\theta = \int_{-T}^{+T} \int_{-T}^{+T} A_F(t-\theta) \cdot A_F(\theta-\tau) \cdot s(\tau) d\theta d\tau;$$

ou

$$S_2(t) = \int_{-T}^{+T} A_F^{(2)}(t-\tau) \cdot s(\tau) d\tau,$$

$A_F^{(2)}(t-\tau)$  étant le premier itéré du noyau  $A_F(t-\tau)$  :

$$(88) \quad A_F^{(2)}(t-\tau) = \int_{-T}^{+T} A_F(t-\theta) \cdot A_F(\theta-\tau) d\theta.$$

Pour toute variation  $\delta s(t)$  ajoutée au signal  $s(t)$  cherché, la variation première du rapport  $K'$  doit être nulle, ce qui conduit à reprendre la théorie faite au chapitre II, en y remplaçant seulement le rapport  $K$  par le rapport  $K'$ , le signal  $S(t)$  par le signal  $S_2(t)$ , et le noyau  $A_F(t-\tau)$  par le noyau  $A_F^{(2)}(t-\tau)$ .

On obtient ainsi une condition nécessaire (mais non suffisante), analogue à (4), (4') ou (5), d'où résulte la relation, analogue à (6),

$$(89) \quad S_2(t) = K' s(t), \quad \text{pour} \quad -T < t < +T;$$

et l'on voit, d'après les relations (87) et (89), que le signal doublement filtré  $S_2(t)$  doit être solution de l'équation intégrale linéaire et homogène, analogue à (7),

$$(90) \quad S_2(t) = \frac{1}{K'} \int_{-T}^{+T} A_F^{(2)}(t-\tau) \cdot S_2(\tau) d\tau.$$

D'ailleurs, si le signal  $s(t)$ , limité à l'intervalle de temps  $(-T, +T)$ , est défini par la relation (89) à partir d'un signal  $S_2(t)$  vérifiant une telle équation intégrale,  $S_2(t)$  résulte bien de  $s(t)$  par le double filtrage (87), et le rendement énergétique du simple filtrage (1), suivi de la limitation du signal simplement filtré  $S(t)$  à l'intervalle de temps  $(-T, +T)$ , est égal à  $K'$  d'après la relation (86) qui donne, compte tenu de (89),

$$(91) \quad \int_{-T}^{+T} S^2(t) dt = \int_{-T}^{+T} S_2(t) \cdot s(t) dt = K' \int_{-T}^{+T} s^2(t) dt.$$

La détermination du signal  $s(t)$  cherché se trouve donc ramenée à la recherche des solutions d'une équation intégrale linéaire et homogène (90), où la constante  $K'$ , évidemment comprise entre 0 et 1, doit être choisie aussi grande que possible.

Or, d'après la théorie du développement des noyaux itérés ([2], chap. IV, § 234),

— le noyau symétrique  $A_F^{(2)}(t-\tau)$  a les mêmes fonctions propres  $\sigma_1(t)$ , deux à deux orthogonales et supposées normées  $\left\{ \int_{-T}^{+T} [\sigma_1(t)]^2 dt = 1 \right\}$ , que le noyau  $A_F(t-\tau)$  dont il est le premier itéré;

— les valeurs propres  $1/K'_i$  correspondantes, dans l'équation intégrale (90), sont les carrés des valeurs propres  $1/K_i$  respectivement associées aux mêmes fonctions propres  $\sigma_1(t)$  dans l'équation intégrale (7) :

$$(92) \quad K'_i = K_i^2$$

[ce qui résulte d'ailleurs de la comparaison des relations (8) et (91)];

— enfin le noyau symétrique  $A_F^{(2)}(t-\tau)$  est la somme de la série, absolument et uniformément convergente dans le domaine  $-T < t < +T$ ,  $-T < \tau < +T$ ,

$$(93) \quad A_F^{(2)}(t-\tau) = \int_{-T}^{+T} A_F(t-\theta) \cdot A_F(\theta-\tau) d\theta = \sum_{l=0}^{\infty} K_l^2 \sigma_l(t) \cdot \sigma_l(\tau).$$

Par conséquent, le problème posé au début de ce paragraphe a les mêmes solutions que le problème posé au début du chapitre II et traité dans les chapitres II à VII, et le rendement énergétique maximum  $K'_0(F, T)$ , obtenu par coupure des fréquences supérieures à  $F$  dans le spectre d'un signal  $s(t)$  limité à l'intervalle de temps  $(-T, +T)$  et limitation du signal filtré  $S(t)$  ainsi obtenu au même intervalle de temps, est égal au carré du rendement énergétique maximum  $K_0(F, T)$  obtenu par le seul filtrage du même signal  $s(t)$  convenablement choisi.

[Il serait d'ailleurs facile de reprendre l'étude de l'équation intégrale (90), mise sous la forme équivalente

$$(90') \quad S_2(T, \lambda) = \frac{1}{K'} \int_{-1}^{+1} A_{FT}^{(2)}(\lambda - \mu) \cdot S_2(T, \mu) d\mu,$$

avec

$$(88') \quad A_{FT}^{(2)}(\lambda - \mu) = \int_{-1}^{+1} A_{FT}(\lambda - u) \cdot A_{FT}(u - \mu) du,$$

en lui appliquant directement les résultats obtenus au chapitre IV.

Il suffirait de montrer que le noyau symétrique  $A_{FT}^{(2)}(\lambda - \mu)$  est solution de l'équation aux dérivées partielles (28), ce qui résulte de l'application de la relation (30) au noyau symétrique  $\Omega(\lambda, \mu) = A_{FT}(\lambda - \mu)$ , qui est solution de l'équation (28), et à la fonction  $G(\mu) = A_{FT}(\mu - \nu)$ .

Le noyau  $A_{FT}^{(2)}(\lambda - \mu)$  étant « fermé » comme  $A_{FT}(\lambda - \mu)$ , il en résulte que l'ensemble des solutions des équations intégrales (90') est identique à l'ensemble des solutions bornées des équations différentielles (24).]

Enfin l'étude générale du rendement énergétique du filtrage d'un signal  $\sigma(t)$  de durée finie, faite au chapitre V, pourrait être entièrement reprise ici, la relation (34), qui donne le rendement  $K$  obtenu par simple filtrage, étant seulement remplacée par la relation qui donne le rendement  $K'$  obtenu par filtrage et limitation dans le temps

$$(94) \quad K' = \int_{-T}^{+T} \sum^2(t) dt \bigg/ \int_{-T}^{+T} \sigma^2(t) dt = \frac{\sum_{l=0}^{\infty} a_l^2 K_l^2}{\sum_{l=0}^{\infty} a_l^2}.$$

Les résultats obtenus au chapitre V subsistent donc ici, les rendements énergétiques  $K_l$ , inverses des valeurs propres du noyau  $A_{FT}(\lambda - \mu)$ , devant seulement être remplacés par leurs carrés  $K'_l = K_l^2$ , inverses des valeurs propres du noyau itéré  $A_{FT}^{(2)}(\lambda - \mu)$ .

Et l'on est ainsi conduit à définir les mêmes signaux de durée finie et d'énergie filtrée maximum :

- le signal pair  $s(t)$  parmi tous les signaux  $\sigma(t)$  de durée finie,
- le signal impair  $s_1(t)$  parmi tous les signaux  $\sigma(t)$  impairs.

En résumé, d'après l'étude complémentaire qui vient d'être faite,

— les signaux de durée finie et d'énergie filtrée maximum, déterminés aux chapitres VI et VII de la présente note, sont les signaux de durée finie dont l'énergie est aussi peu absorbée que possible,

— soit par un simple filtrage,

— soit par un filtrage suivi d'une limitation dans le temps;

— de plus, les rendements énergétiques maxima obtenus dans le second cas sont égaux aux carrés des rendements énergétiques maxima obtenus dans le premier cas.

## ANNEXE I. — ÉQUATION DES ONDES EN COORDONNÉES HOMOFOCALES.

L'équation des ondes s'écrit, d'une façon générale,

$$(A.1) \quad \Delta \Omega + k^2 \Omega = 0,$$

$\Omega$  étant une fonction des trois coordonnées spatiales, et  $\Delta \Omega$  désignant le laplacien de cette fonction, qui a pour expression :

— en coordonnées cartésiennes rectangulaires  $x, y, z$ ,

$$(A.2) \quad \Delta \Omega(x, y, z) = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2};$$

— en coordonnées cylindriques  $r, \theta, z$ ,

$$(A.3) \quad \Delta \Omega(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2};$$

— en coordonnées curvilignes trirectangulaires quelconques  $u_1, u_2, u_3$ , où les vecteurs de coordonnées  $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$  sont définis en chaque point par la relation donnant le déplacement élémentaire

$$d\vec{M} = \vec{E}_1 du_1 + \vec{E}_2 du_2 + \vec{E}_3 du_3,$$

$$(A.4) \quad \Delta \Omega(u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{|\vec{E}_1| |\vec{E}_2| |\vec{E}_3|} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{|\vec{E}_2| |\vec{E}_3|}{|\vec{E}_1|} \frac{\partial \Omega}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{|\vec{E}_3| |\vec{E}_1|}{|\vec{E}_2|} \frac{\partial \Omega}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left( \frac{|\vec{E}_1| |\vec{E}_2|}{|\vec{E}_3|} \frac{\partial \Omega}{\partial u_3} \right) \right\}$$

(formule de Lamé).

Considérons alors, en coordonnées cylindriques  $r, \theta, z$ , une fonction  $\Omega(r, \theta, z)$ , et rapportons l'espace à des coordonnées homofocales  $\lambda, \theta, \mu$  définies en fonction de  $r, \theta, z$  par les relations

$$(A.5) \quad \begin{cases} 2\lambda = \sqrt{r^2 + (z+1)^2} + \sqrt{r^2 + (z-1)^2}, \\ 2\mu = \sqrt{r^2 + (z+1)^2} - \sqrt{r^2 + (z-1)^2}. \end{cases}$$

Les surfaces de coordonnées sont, outre les plans passant par Oz, les ellipsoïdes et les hyperboloïdes de révolution ayant pour foyers les points de cotes  $z = \pm 1$  situés sur cet axe. Elles forment évidemment un système trirectangulaire.

Inversement,  $r$  et  $z$  sont définis en fonction de  $\lambda$  et  $\mu$  par les relations

$$(A.6) \quad \begin{cases} r^2 = (\lambda + \mu)^2 - (\lambda \mu + 1)^2 = (\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2), \\ z = \lambda \mu. \end{cases}$$

Posons, pour simplifier les calculs intermédiaires,

$$\begin{cases} \lambda = \operatorname{ch} u, & \text{d'où} & \begin{cases} r = \operatorname{sh} u \sin v, \\ z = \operatorname{ch} u \cos v. \end{cases} \\ \mu = \cos v, \end{cases}$$

Le déplacement élémentaire  $d\vec{M}$  est défini par

$$(A.7) \quad \begin{aligned} \overline{dM}^2 &= dr^2 + dz^2 + r^2 d\theta^2 = (\operatorname{ch}^2 u - \cos^2 v)(du^2 + dv^2) + \operatorname{sh}^2 u \sin^2 v d\theta^2 \\ &= \frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 - 1} d\lambda^2 + \frac{\lambda^2 - \mu^2}{1 - \mu^2} d\mu^2 + (\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2) d\theta^2. \end{aligned}$$

La formule de Lamé (A.4) donne alors immédiatement l'expression du laplacien en coordonnées homofocales  $\lambda, \theta, \mu$  :

$$(A.8) \quad \Delta \Omega(\lambda, \theta, \mu) = \frac{1}{\lambda^2 - \mu^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ (\lambda^2 - 1) \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} \right] + \frac{\partial}{\partial \mu} \left[ (1 - \mu^2) \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right] \right\} + \frac{1}{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \theta^2}.$$

L'équation des ondes (A.1) s'écrit donc, en coordonnées homofocales, pour une fonction  $\Omega(\lambda, \mu)$  indépendante de  $\theta$ , c'est-à-dire présentant une symétrie de révolution autour de l'axe Oz, sous la forme simple :

$$(A.9) \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ (\lambda^2 - 1) \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} \right] + k^2 \lambda^2 \Omega = \frac{\partial}{\partial \mu} \left[ (\mu^2 - 1) \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right] + k^2 \mu^2 \Omega.$$

C'est l'équation (28) du chapitre IV.

Il est clair que cette équation peut ensuite être considérée, comme nous l'avons fait au chapitre IV, indépendamment des coordonnées homofocales qui permettent de l'assimiler à l'équation des ondes. Les variables  $\lambda$  et  $\mu$  ne sont alors soumises à aucune restriction, alors que, lorsqu'elles représentent les coordonnées homofocales d'un point réel, ce sont des variables réelles soumises aux conditions

$$\lambda > 1 \quad \text{et} \quad |\mu| < 1.$$

*Remarque.* — L'expression (A.8) du laplacien en coordonnées homofocales  $\lambda, \theta, \mu$  peut aussi se déduire de son expression en coordonnées  $u, \theta, v$  :

$$(A.10) \quad \Delta \Omega(u, \theta, v) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u - \cos^2 v} \left[ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u^2} + \frac{\operatorname{ch} u}{\operatorname{sh} u} \frac{\partial \Omega}{\partial u} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial v^2} + \frac{\cos v}{\sin v} \frac{\partial \Omega}{\partial v} \right] + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 u \sin^2 v} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \theta^2}.$$

Cette dernière expression, qui résulte simplement de l'application de la formule de Lamé (A.4), peut aussi se déduire par un calcul direct (simple, mais assez long) de l'expression (A.3) du laplacien en coordonnées cylindriques  $r, \theta, z$ .

ANNEXE II. — TABLEAUX ET FIGURES.

TABLEAU 0  
SERVANT A LA DÉTERMINATION DU SIGNAL  $s(t)$   
[ $\mu = 0$ ] [formule 61].

$k$	$K_0(k) \%$	$C_0(k)$	$+d_0(k, 0)$	$-d_0(k, 0)$	$+d_4(k, 0)$	$-d_6(k, 0)$	$+d_8(k, 0)$	$-d_{10}(k, 0)$	$+d_{12}(k, 0)$	$-d_{14}(k, 0)$
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0,1	6,36	0,00333	0,99945	0,0011101	0,000000190	0,000000000	0,000000000	0,000000000	0,000000000	0,000000000
0,2	12,68	0,01331	0,99778	0,0044290	0,000003036	0,000000001	0,000000000	0,000000000	0,000000000	0,000000000
0,4	25,02	0,05296	0,99122	0,017532	0,000048020	0,000000055	0,000000000	0,000000000	0,000000000	0,000000000
0,5	30,97	0,08242	0,98637	0,027180	0,00011623	0,000000209	0,000000000	0,000000000	0,000000000	0,000000000
0,6	36,72	0,11810	0,98053	0,038768	0,00023849	0,000000619	0,000000001	0,000000000	0,000000000	0,000000000
0,8	47,53	0,20739	0,96608	0,067281	0,00073390	0,0000003380	0,000000009	0,000000000	0,000000000	0,000000000
1,0	57,26	0,31900	0,94837	0,10195	0,0017316	0,000012439	0,000000049	0,000000000	0,000000000	0,000000000
1,2	65,78	0,45073	0,92796	0,14147	0,0034449	0,000035561	0,000000203	0,000000001	0,000000000	0,000000000
1,4	73,07	0,60010	0,90547	0,18446	0,0060801	0,000085205	0,000000663	0,000000003	0,000000000	0,000000000
1,5	76,26	0,68058	0,89363	0,20680	0,0078006	0,00012530	0,000001118	0,000000006	0,000000000	0,000000000
1,6	79,15	0,76447	0,88152	0,22949	0,0098150	0,00017908	0,000001816	0,000000012	0,000000000	0,000000000
1,8	84,10	0,94120	0,85672	0,27526	0,014783	0,00034007	0,000004354	0,000000036	0,000000000	0,000000000
2,0	88,05	1,12773	0,83162	0,32059	0,021062	0,00059551	0,000009388	0,000000094	0,000000000	0,000000000
2,2	91,14	1,32174	0,80669	0,36450	0,028673	0,00097590	0,000018558	0,000000225	0,000000002	0,000000000
2,4	93,50	1,52117	0,78230	0,40625	0,037582	0,0015133	0,000034127	0,000000492	0,000000005	0,000000000
2,5	94,46	1,62238	0,77040	0,42614	0,042500	0,0018509	0,000045205	0,000000706	0,000000008	0,000000000
2,6	95,28	1,72433	0,75874	0,44531	0,047710	0,0022397	0,000059042	0,000000996	0,000000012	0,000000000
2,8	96,61	1,92986	0,73620	0,48135	0,058940	0,0031852	0,000096952	0,000001890	0,000000026	0,000000000
3,0	97,58	2,13673	0,71480	0,51422	0,071137	0,0043773	0,00015220	0,000003398	0,000000053	0,000000000
3,2	98,28	2,34419	0,69460	0,54392	0,084149	0,0058391	0,00022976	0,000005815	0,000000103	0,000000001
3,4	98,79	2,55172	0,67559	0,57052	0,097824	0,0075896	0,00033517	0,000009538	0,000000189	0,000000003
3,5	98,99	2,65540	0,66653	0,58271	0,10486	0,0085776	0,00040017	0,000012042	0,000000253	0,000000004
3,6	99,15	2,75899	0,65775	0,59419	0,11201	0,0096427	0,00047440	0,000015071	0,000000334	0,000000005
3,8	99,41	2,96581	0,64103	0,61513	0,12657	0,012008	0,00065377	0,000023036	0,000000567	0,000000010
4,0	99,59	3,17207	0,62537	0,63356	0,14138	0,014689	0,00087978	0,000034182	0,000000930	0,000000019
4,2	99,72	3,37775	0,61068	0,64969	0,15631	0,017687	0,0011590	0,000049391	0,000001476	0,000000033
4,4	99,80	3,58286	0,59690	0,66376	0,17127	0,020997	0,0014981	0,000069681	0,000002276	0,000000055
4,5	99,83	3,68521	0,59033	0,67009	0,17873	0,022768	0,0016920	0,000082085	0,000002798	0,000000071
4,6	99,86	3,78743	0,58396	0,67598	0,18616	0,024614	0,0019032	0,000096202	0,000003420	0,000000090
4,8	99,90	3,99150	0,57179	0,68654	0,20092	0,028526	0,0023806	0,00013023	0,000005019	0,000000143
5,0	99,94	4,19514	0,56032	0,69561	0,21548	0,032721	0,0029359	0,00017318	0,000007208	0,000000223

TABLEAU I  
SERVANT A LA DÉTERMINATION DU SIGNAL  $s_1(\vartheta)$   
[ $\mu = 1$ ] [formule (64)].

$k$	$K_1(k) \%$	$C_1(k)$	$+d_1(k, 1)$	$-d_3(k, 1)$	$+d_5(k, 1)$	$-d_7(k, 1)$	$+d_9(k, 1)$	$-d_{11}(k, 1)$	$+d_{13}(k, 1)$	$-d_{15}(k, 1)$
0	0	2,00600	1	0	0	0	0	0	0	0
0,1	0,007	2,00600	0,99940	0,00039980	0,000000045	0,000000000	0,000000000	0,000000000	0,000000000	0,000000000
0,2	0,056	2,02399	0,99760	0,0015967	0,000000724	0,000000000	0,000000000	0,000000000	0,000000000	0,000000000
0,4	0,444	2,09582	0,99046	0,0063479	0,000011522	0,000000010	0,000000000	0,000000000	0,000000000	0,000000000
0,5	0,858	2,14957	0,98514	0,0098730	0,000028008	0,000000038	0,000000000	0,000000000	0,000000000	0,000000000
0,6	1,463	2,21511	0,97869	0,014137	0,000057774	0,000000113	0,000000000	0,000000000	0,000000000	0,000000000
0,8	3,355	2,38118	0,96250	0,024776	0,00018016	0,000000628	0,000000000	0,000000000	0,000000000	0,000000000
1,0	6,28	2,59308	0,94217	0,038007	0,00043231	0,000002355	0,000000008	0,000000000	0,000000000	0,000000000
1,2	10,30	2,84961	0,91807	0,053514	0,00087765	0,000006890	0,000000032	0,000000000	0,000000000	0,000000000
1,4	15,39	3,14924	0,89059	0,070931	0,0015856	0,000016956	0,000000107	0,000000000	0,000000000	0,000000000
1,5	18,31	3,31466	0,87573	0,080231	0,0020604	0,000025303	0,000000183	0,000000001	0,000000000	0,000000000
1,6	21,44	3,49016	0,86021	0,089854	0,0026274	0,000036726	0,000000302	0,000000002	0,000000000	0,000000000
1,8	28,24	3,87026	0,82742	0,10985	0,0040716	0,000072086	0,000000752	0,000000005	0,000000000	0,000000000
2,0	35,56	4,28713	0,79276	0,13049	0,0059797	0,00013080	0,00001684	0,000000014	0,000000000	0,000000000
2,2	43,13	4,73808	0,75676	0,15133	0,0084018	0,00022251	0,00003468	0,000000036	0,000000000	0,000000000
2,4	50,68	5,22017	0,71995	0,17195	0,011373	0,00035864	0,00006655	0,000000082	0,000000001	0,000000000
2,5	54,38	5,47190	0,70141	0,18205	0,013072	0,00044734	0,000099007	0,000000120	0,000000001	0,000000000
2,6	57,97	5,73023	0,68286	0,19196	0,014913	0,00055206	0,00012024	0,000000173	0,000000002	0,000000000
2,8	64,79	6,26493	0,64596	0,21103	0,019019	0,00081661	0,00020627	0,000000344	0,000000004	0,000000000
3,0	71,00	6,82088	0,60970	0,22885	0,023672	0,0011665	0,00033819	0,000000647	0,000000009	0,000000000
3,2	76,49	7,39469	0,57446	0,24521	0,028834	0,0016157	0,00053272	0,000001160	0,000000018	0,000000000
3,4	81,23	7,98305	0,54054	0,25993	0,034451	0,0021771	0,00080981	0,000001989	0,000000035	0,000000000
3,5	83,33	8,28171	0,52416	0,26665	0,037410	0,0025035	0,00098637	0,000002566	0,000000047	0,000000001
3,6	85,23	8,58286	0,50820	0,27292	0,040457	0,0028620	0,0011924	0,000003281	0,000000064	0,000000001
3,8	88,54	9,19132	0,47761	0,28414	0,046776	0,0036798	0,0017059	0,000005225	0,000000114	0,000000002
4,0	91,21	9,80595	0,44886	0,29359	0,053331	0,0046370	0,0023780	0,000008061	0,000000194	0,000000003
4,2	93,34	10,42464	0,42202	0,30135	0,060039	0,0057377	0,0032376	0,000012083	0,000000321	0,000000006
4,4	95,00	11,04574	0,39706	0,30750	0,066826	0,0069835	0,0043144	0,000017642	0,000000513	0,000000011
4,5	95,68	11,35675	0,38528	0,31001	0,070225	0,0076605	0,0049436	0,000021125	0,000000642	0,000000015
4,6	96,28	11,66787	0,37395	0,31216	0,073618	0,0083731	0,0056382	0,000025150	0,000000799	0,000000019
4,8	97,25	12,29009	0,35259	0,31547	0,080352	0,0099030	0,0072379	0,000035077	0,000001211	0,000000031
5,0	97,99	12,91171	0,33290	0,31756	0,086971	0,011568	0,0091415	0,000047950	0,000001793	0,000000050

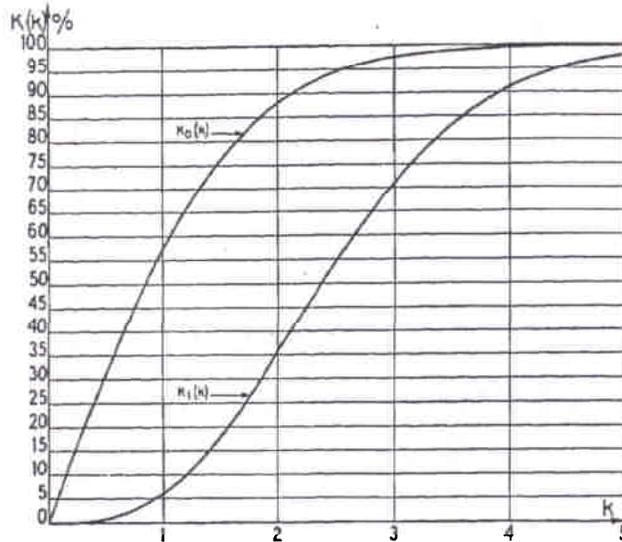


Fig. 1. — Rendements  $K_0(k)$  et  $K_1(k)$  [ $k = 2 \pi l^2 T$ ].  
[Voir Tableaux 0 et I]

TABLEAU II

donnant quelques valeurs des fonctions  $G_0(k, \lambda) = \sum_{p=0}^{\infty} d_{2p}(k, 0) P_{2p}(\lambda)$ .  
[Cf. § 6.3, formule (61)].

$\lambda$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$
0	1	1	1	1	1
0,1	0,9985	0,9945	0,9893	0,9842	0,9786
0,2	0,994	0,978	0,958	0,937	0,919
0,25	0,990	0,965	0,934	0,905	0,876
0,3	0,986	0,950	0,907	0,865	0,826
0,4	0,975	0,912	0,839	0,770	0,707
0,5	0,961	0,865	0,757	0,659	0,574
0,6	0,944	0,810	0,664	0,540	0,439
0,7	0,924	0,748	0,565	0,420	0,312
0,75	0,913	0,714	0,514	0,362	0,255
0,8	0,901	0,679	0,463	0,307	0,203
0,9	0,876	0,607	0,363	0,205	0,115
0,95	0,862	0,569	0,314	0,160	0,080
1	0,8481	0,5315	0,2675	0,1193	0,0502

[Voir fig. 2.]

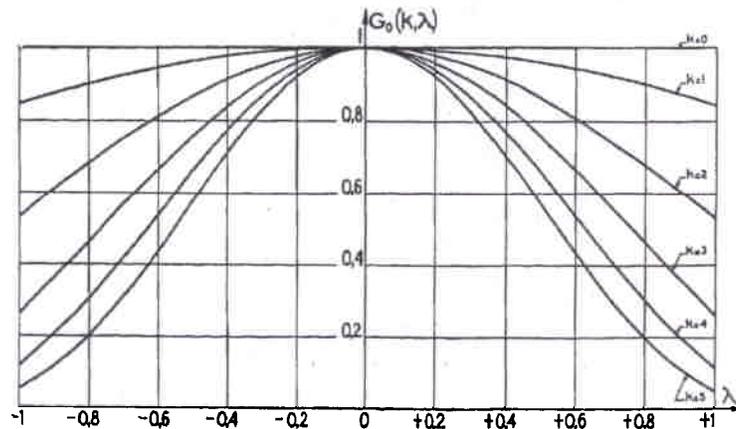


Fig. 2. —  $s(l) = \begin{cases} c G_0(k, l/T) & \text{pour } -T < l < +T, \\ 0 & \text{pour } |l| > T. \end{cases}$   
[Voir Tableau I]

TABLEAU II bis

donnant quelques valeurs des fonctions  $\varphi_0(k, \lambda) = e^{-\frac{k}{2}\lambda^2}$ .  
 $[G_0(k, \lambda) \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \varphi_0(k, \lambda) \text{ — formule (74)}].$

$\lambda$	$k = 5$	$k = 10$	$k = 20$
0	1	1	1
0,1	0,975	0,951	0,905
0,2	0,905	0,819	0,670
0,25	0,855	0,731	0,535
0,3	0,799	0,638	0,407
0,4	0,670	0,449	0,202
0,5	0,535	0,286	0,0821
0,6	0,407	0,165	0,0273
0,7	0,293	0,0863	0,0075
0,75	0,245	0,0600	0,0038
0,8	0,202	0,0408	0,0017
0,9	0,132	0,0174	0,00030
0,95	0,105	0,0110	0,00012
1	0,0821	0,00674	0,000045

N. B. — Les courbes représentatives des fonctions  $\varphi_0(k, \lambda)$  présentent des points d'inflexion pour

$$k\lambda^2 = 1, \quad \varphi_0 = e^{-\frac{1}{2}} = 0,607.$$

[Voir fig. 2 bis.]

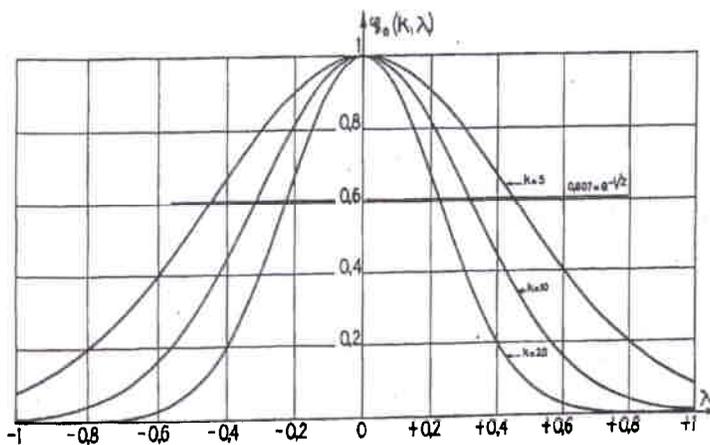


Fig. 2 bis. —  $G_0(k, \lambda) \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \varphi_0(k, \lambda) = e^{-\frac{k}{2}\lambda^2}$ .

[Voir Tableau II bis].

TABLEAU III

donnant quelques valeurs des fonctions  $G_1(k, \lambda) = \sum_{p=0}^{\infty} d_{2p+1}(k, 1) P_{2p+1}(\lambda)$ .

[Cf. § 6.3, formule (64)].

$\lambda$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
0	0	0	0	0	0
0,1	0,0999	0,0996	0,0992	0,0987	0,0980
0,2	0,199	0,197	0,194	0,190	0,186
0,25	0,248	0,244	0,238	0,230	0,223
0,3	0,297	0,290	0,279	0,266	0,254
0,4	0,394	0,376	0,351	0,323	0,297
0,5	0,488	0,454	0,407	0,357	0,311
0,6	0,579	0,522	0,444	0,365	0,297
0,7	0,667	0,578	0,462	0,351	0,261
0,75	0,709	0,601	0,464	0,335	0,236
0,8	0,751	0,621	0,460	0,315	0,209
0,9	0,830	0,652	0,440	0,265	0,150
0,95	0,868	0,662	0,424	0,235	0,120
1	0,9046	0,6681	0,4034	0,2042	0,0916

[Voir fig. 3.]

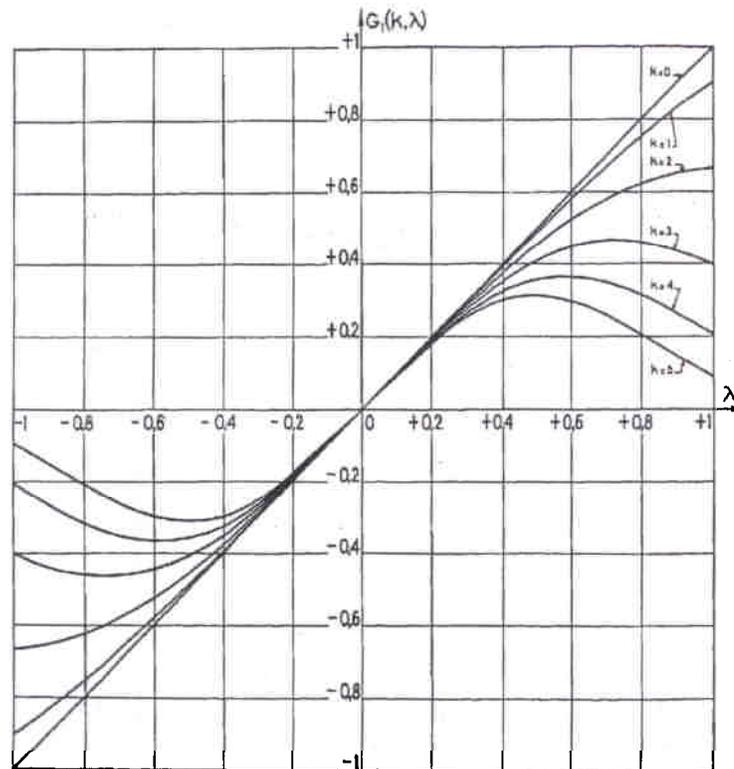


Fig. 3. —  $s_1(t) = \begin{cases} o G_1(k, \frac{t}{T}) & \text{pour } -T < t < +T, \\ 0 & \text{pour } |t| > T. \end{cases}$

[Voir Tableau III].

TABLEAU III bis

donnant quelques valeurs des fonctions  $\mathcal{G}_1(k, \lambda) = \lambda e^{-\frac{k}{2}\lambda^2}$ .  
 $[\mathcal{G}_1(k, \lambda) \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \mathcal{G}_1(k, \lambda) - \text{formule (75)}].$

$\lambda$	$k = 5$	$k = 10$	$k = 20$
0	0	0	0
0,1	0,0975	0,0951	0,0905
0,2	0,181	0,164	0,134
0,25	0,214	0,183	0,134
0,3	0,240	0,191	0,122
0,4	0,268	0,180	0,0808
0,5	0,268	0,143	0,0410
0,6	0,244	0,0990	0,0164
0,7	0,205	0,0604	0,0052
0,75	0,184	0,0450	0,0027
0,8	0,162	0,0326	0,0013
0,9	0,119	0,0157	0,00027
0,95	0,100	0,0104	0,00011
1	0,0821	0,00674	0,000045

N. B. — Les courbes représentatives des fonctions  $\mathcal{G}_1(k, \lambda)$  présentent :  
 des maxima ou des minima pour  $k\lambda^2 = 1$ ,  $\frac{\mathcal{G}_1}{\lambda} = e^{-\frac{1}{2}} = 0,607$  ;  
 des points d'inflexion pour  $k\lambda^2 = 3$ ,  $\frac{\mathcal{G}_1}{\lambda} = e^{-\frac{3}{2}} = 0,223$ . [Voir fig. 3 bis.]

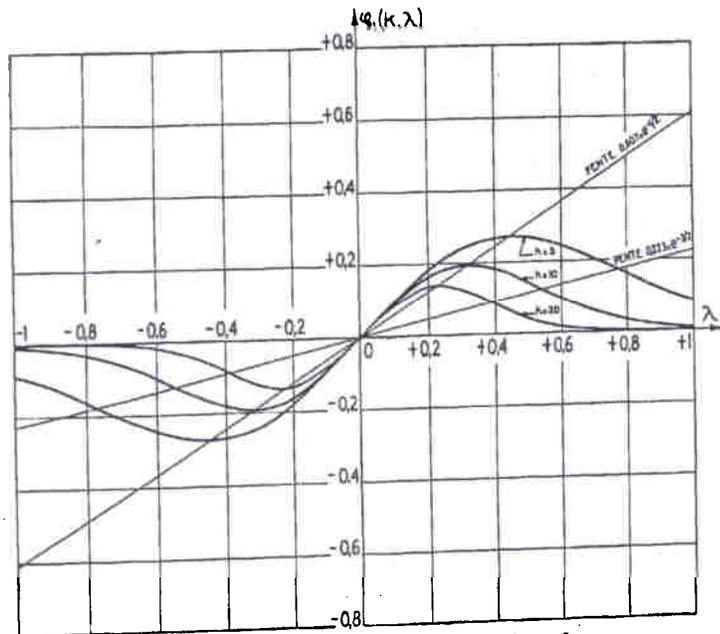


Fig. 3 bis. —  $G_1(k, \lambda) \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \mathcal{G}_1(k, \lambda) = \lambda e^{-\frac{k}{2}\lambda^2}$   
 [Voir Tableau III bis]

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. H. H. CHALK. — The optimum pulse-shape for pulse communication, *The Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*, vol. 97, Part III, Number 46, mars 1950, pp. 88-92.
- [2] A. LICHNEROWICZ. — *Algèbre et analyse linéaires*, Masson, Paris, 1947.
- [3] Philip M. MORSE and Herman FESHBACH. — *Methods of theoretical physics*, Mac Graw-Hill Book Cy, New-York, 1953.
- [4] STRATTON, MORSE, CHU and HUTNER. — *Elliptic cylinder and spheroidal wave functions*, *The Technology Press*, M. I. T., 1941.
- [5] J. A. VILLE et J. BOUZITAT. — Sur un type de signaux pratiquement bornés en temps et en fréquence, *Câbles & Transmission*, oct. 1955, pp. 293-303.