

N° d'ordre : 93-2006

Année 2006

## THÈSE

présentée devant

**l'UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD - LYON 1**

pour l'obtention du

**DIPLÔME DE DOCTORAT**

(arrêté du 25 avril 2002)

présentée et soutenue publiquement le 28 Juin 2006 par

SOPHIE MORIER-GENOUD

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

---

**RELÈVEMENT GÉOMÉTRIQUE DE L'INVOLUTION DE  
SCHÜTZENBERGER ET APPLICATIONS**

---

### RAPPORTEURS

M. Bernard LECLERC  
M. Andrei ZELEVINSKY

### JURY

M. Pierre BAUMANN  
M. Michel BRION  
M. Philippe CALDERO, *Directeur de thèse*  
M. Marc CHAMARIE  
M. Bernard LECLERC



# Remerciements

Je remercie du fond du cœur Philippe Caldero d'avoir dirigé mes recherches. Sa disponibilité, sa patience, sa pédagogie, sa culture et son humour m'ont permis de travailler dans les meilleures conditions.

Je souhaite exprimer ma profonde reconnaissance envers Bernard Leclerc et Andreï Zelevinsky qui ont accepté d'être rapporteurs de cette thèse. Je les remercie pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail et pour leurs remarques pertinentes.

J'adresse également mes sincères remerciements à Pierre Baumann, Michel Brion, Marc Chamarie et Bernard Leclerc, qui me font l'honneur d'être membres du jury.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers Pierre Baumann pour toute l'aide précieuse qu'il m'a apportée lors de cours particuliers intensifs pendant mon séjour à Strasbourg, et pour sa relecture attentive du manuscrit qui a permis de multiples corrections.

Je souhaite remercier très chaleureusement Jérôme Germoni, pour tout le temps qu'il a pris et tout le soin qu'il a mis dans d'innombrables explications et calculs, qui furent une aide considérable.

Je remercie sincèrement tous les membres de l'Institut Camille Jordan pour leur accueil chaleureux, en particulier Valentin Ovsienko pour toute son aide et ses nombreux conseils en tant qu' "older colleague", Monique Gaffier et Sybil Caraboeuf pour leur gentillesse, leur disponibilité et leur efficacité dans toutes les démarches administratives, Thierry Dumont et Violaine Louvet pour m'avoir porté secours dans tous mes soucis informatiques.

Je souhaite également remercier tous mes collègues de bureau, pour les aides, les distractions et leur joyeuse compagnie : Florence, Jean-Baptiste, Juan, Laurian, Martin et Olivier. Je remercie également mes collègues Jules-de-chez-Smith-en-face pour les diverses activités ludiques auxquelles ils m'ont fait participer : Antoine, Christophe, Nicolas, Lucas et Pierre.

Enfin, j'adresse des pensées particulières à mes amis et à ma famille qui, de près, de loin ou d'en-haut, m'ont accompagné pendant, entre autre, ces années de thèse. Je les remercie pour leur sympathie et leur affection.



# Introduction

Soit  $G$  un groupe de Lie semi-simple simplement connexe sur  $\mathbb{C}$  et  $U$  un sous groupe unipotent maximal. Il est connu que toute représentation irréductible de  $G$  s'injecte naturellement dans  $\mathbb{C}[U]$  l'algèbre des fonctions régulières sur  $U$ ,  $\mathbb{C}[U]$  pouvant être vue comme la limite inductive de ces représentations. Un problème naturel important a été de savoir s'il existait des bases, appelées bonnes bases, de  $\mathbb{C}[U]$ , compatibles avec ces représentations.

La réponse la plus satisfaisante à ce problème a été donnée indépendamment par Lusztig [26] et Kashiwara [21] en 1990 avec la construction des bases dites canoniques ou globales. Les constructions de Lusztig et de Kashiwara procurent toutes deux des modèles combinatoires intéressants. Ces modèles reposent sur des décompositions réduites de  $w_0$ , l'élément de longueur maximale dans le groupe de Weyl associé à  $G$ . Dans l'approche de Lusztig, chaque décomposition de  $w_0$ , symbolisée par une suite d'indices de longueur  $N$  et notée  $\mathbf{i}$ , donne lieu à une paramétrisation des éléments de la base par l'ensemble  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^N$ . Dans l'approche de Kashiwara, ce sont les actions successives d'opérateurs sur un élément de la base (correspondant à des actions modifiées des générateurs de Chevalley) suivant une décomposition réduite  $\mathbf{i}$ , qui fournissent une paramétrisation par un  $N$ -uplet d'entiers. Cette dernière paramétrisation est connue sous le nom de paramétrisation en cordes (*string parametrization*).

Lusztig a fait une observation originale, concernant une analogie entre des formules de changement de mot réduit dans les paramétrisations de la base canonique et celles de changement de paramétrisations dans des sous-variétés de  $G$  : les premières se déduisent des secondes en remplaçant les opérations  $+$ ,  $\times$ ,  $\div$  par les opérations  $\min$ ,  $+$ ,  $-$  respectivement. Cette substitution a été formulée par Berenstein-Fomin-Zelevinsky en termes d'homomorphisme de semi-corps entre les ensembles  $\mathbb{R}_{>0}$  et  $\mathbb{Z}$ , et a amené deux transformations : la *tropicalisation* (décrite ci-dessus) et sa réciproque à droite, le *relevé géométrique* (pouvant être vu comme un inverse à droite), [2].

Berenstein et Zelevinsky ont par la suite précisé le lien entre les paramétrisations de la base canonique et les paramétrisations de sous-variétés totalement positives du groupe  $G$ , [5]. Ce lien est appelé *relèvement géométrique de la base canonique*. Dans le groupe  $G$ , les éléments positifs sont définis à l'aide des sous-groupes à un paramètre associés aux générateurs de Chevalley restreints à  $\mathbb{R}_{>0}$ . Certaines sous-variétés d'éléments positifs peuvent être

paramétrées en suivant des décompositions réduites d'éléments du groupe de Weyl. Les changements de mots réduits dans ces paramétrisations coïncident avec les changements de mots réduits dans les paramétrisations de la base canonique via la tropicalisation et le relevé géométrique. La méthode du relèvement géométrique consiste à faire des calculs sur les paramétrisations des sous-variétés pour en déduire des formules sur les paramétrisations de la base canonique. Cette méthode a notamment permis d'obtenir le lien entre les paramétrisations de Lusztig et les paramétrisations en cordes, ainsi que les formules de changement de décomposition réduite de  $w_0$  dans les paramétrisations de la base canonique, [5].

La combinatoire des bases canoniques permet de généraliser la combinatoire classique donnée par les tableaux de Young semi-standard. Ces tableaux sont utilisés dans l'étude des représentations du groupe  $SL_n(\mathbb{C})$ . Ils permettent notamment d'exprimer combinatoirement des formules de caractères, ou des formules de décomposition de produit tensoriel de deux représentations. La paramétrisation de Lusztig et la paramétrisation en cordes associées à une "bonne" décomposition de  $w_0$  redonnent exactement la combinatoire des tableaux de Young.

L'élément  $w_0$  est au cœur de ces combinatoires via ses décompositions réduites. Indépendamment de cela, il joue un rôle important de par son action après relèvement en un élément de  $G$ . Cette action permet d'établir des "dualités" entre différents objets. Le relevé de  $w_0$  agit par automorphisme sur  $G$  et tord ainsi les  $G$ -modules simples. Il est donc intéressant de comprendre comment il agit sur un élément de la base canonique. Lusztig a montré que cette action permute les éléments de la base canonique des  $G$ -modules simples de dimension finie, [29]. Berenstein et Zelevinsky ont alors exprimé cette action en termes de paramétrisation dans le cas du groupe  $SL_n(\mathbb{C})$ , pour le choix de la décomposition réduite de  $w_0$  associée aux tableaux de Young. Dans ce cas ils ont montré que cette action coïncide avec l'involution de Schützenberger définie sur les tableaux, [4].

Dans ce mémoire, nous étudions ce problème généralisé d'une part à tout groupe de Lie semi-simple  $G$ , et d'autre part à toute décomposition réduite. Nous obtenons des formules explicites en terme des paramétrisations de la base canonique pour l'involution de Schützenberger généralisée. Pour cela, nous utilisons la méthode du relevé géométrique. Il s'agit de définir l'analogue de cette involution dans les sous-variétés positives de  $G$ , dans lesquelles les calculs se simplifient, puis d'utiliser la tropicalisation. Il est remarquable que pour un bon choix des paramétrisations la formule explicite de l'involution de Schützenberger généralisée est linéaire. Ces résultats sont publiés dans [32].

Nous donnons par la suite deux applications de ce résultat. La première concerne le problème de dégénérescence toriques des variétés de Richardson. Ces variétés sont des sous-variétés classiques de la variété de drapeaux associée au groupe  $G$ , obtenues en intersectant une sous-variété de Schubert et une sous-variété de Schubert opposée. La variété opposée est l'image par  $w_0$  d'une variété de Schubert classique. Les algèbres de coordonnées associées à ces variétés ont pour base des sous-parties de la base canonique, qui se déduisent

l'une de l'autre par l'involution de Schützenberger généralisée. Connaissant alors la formule explicite sur les paramétrisations des éléments de la base, nous pouvons faire des calculs concrets sur les dégénérescences toriques. Ces résultats sont l'objet de [33].

La deuxième application concerne les cônes de Lusztig. Ces cônes ont été introduits par Lusztig afin de construire des expressions simples d'éléments de la base canonique. Par ailleurs, Caldero a introduit des algèbres dites adaptées, engendrées par des parties de la base canonique. Nous réalisons un cône de Lusztig comme des paramétrisations en cordes d'éléments de base d'une algèbre adaptée tordue par l'involution de Schützenberger. Nous calculons explicitement les générateurs de ces cônes. Ces résultats sont publiés dans [10].

Le mémoire est organisé comme suit :

Au chapitre 1, nous fixons les notations usuelles relatives à l'étude des représentations d'un groupe de Lie semi-simple simplement connexe et de l'algèbre de Lie associée. On y trouve les notations relatives au système de racines, au groupe de Weyl, aux algèbres enveloppantes universelles, aux modules simples, ainsi que les définitions des variétés de Schubert et des variétés de Richardson.

Au chapitre 2, nous rappelons la construction de Lusztig de la base canonique. Nous donnons également les définitions de la paramétrisation de Lusztig et de la paramétrisation en cordes et rappelons les propriétés de compatibilité de la base canonique avec les modules de Weyl et les modules de Demazure.

Au chapitre 3, nous présentons les transformations de tropicalisation et de relèvement géométrique de Berenstein-Fomin-Zelevinsky. Nous présentons les sous-variétés positives et leurs paramétrisations ainsi que les formules reliées aux paramétrisations de la base canonique. Enfin, nous rappelons la définition de l'involution de Schützenberger généralisée et introduisons au §3.4 son analogue géométrique qui nous permet d'obtenir des formules explicites sur les paramètres des éléments de la base canonique.

Au chapitre 4, nous rappelons les définitions et les constructions des variétés toriques. Nous nous intéressons ensuite au problème de dégénérescence torique des variétés de Richardson. Pour construire la variété dégénérée nous utilisons une méthode algébrique qui consiste à munir l'algèbre de coordonnées homogènes associée à la variété de départ de bonne filtration. Nous utilisons les formules du §3.4 dans les calculs concrets sur des exemples.

Au chapitre 5, nous faisons un large résumé de [10]. Nous rappelons la définition des cônes de Lusztig, ainsi que la définition des algèbres adaptées de Caldero. Après torsion d'une algèbre adaptée par l'involution de Schützenberger, nous en calculons les paramétrisations en cordes des éléments de base grâce aux formules obtenue au §3.4. Nous montrons que l'ensemble de ces paramètres est un cône de Lusztig. Nous obtenons alors des générateurs pour ces cônes et la propriété de simplicialité des cônes.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>v</b>
<b>1 Notations</b>	<b>1</b>
1.1 Données usuelles . . . . .	1
1.2 Théorème de classification . . . . .	3
1.3 Groupe de Weyl . . . . .	3
1.4 Algèbres enveloppantes . . . . .	4
1.5 Modules de Weyl et modules de Demazure . . . . .	5
1.6 Groupe de Lie . . . . .	6
<b>2 Bases Canoniques</b>	<b>9</b>
2.1 Construction de la base canonique de $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$ . . . . .	9
2.1.1 L'algèbre $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}^-)$ . . . . .	9
2.1.2 Base Poincaré-Birkhoff-Witt . . . . .	11
2.1.3 Base canonique de Lusztig . . . . .	12
2.1.4 Spécialisation en $q = 1$ . . . . .	12
2.2 Paramétrisations de la base canonique . . . . .	13
2.2.1 Paramétrisation de Lusztig . . . . .	13
2.2.2 Opérateurs de Kashiwara . . . . .	13
2.2.3 Paramétrisation en cordes . . . . .	13
2.2.4 Applications de changement de paramétrisation . . . . .	14
2.3 Base canonique dans les modules . . . . .	14
2.3.1 Théorèmes de compatibilité . . . . .	14
2.3.2 Paramétrisations de $\mathcal{B}(\lambda)$ . . . . .	15
2.3.3 Graphes cristallins . . . . .	16
2.3.4 Tableaux de Young . . . . .	17
2.4 Exemple : base canonique pour $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ . . . . .	18
2.4.1 Base canonique dans $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}^-)$ . . . . .	18
2.4.2 Base canonique dans $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$ . . . . .	22
2.4.3 Bases dans $V(\lambda)$ . . . . .	23
2.4.4 Changement de mot réduit . . . . .	23
2.4.5 Paramétrisations en cordes . . . . .	25
2.5 Base canonique duale de l'algèbre $\bigoplus V(\lambda)^*$ . . . . .	26

<b>3</b>	<b>Relevés géométriques et involution de Schützenberger</b>	<b>31</b>
3.1	Tropicalisation . . . . .	31
3.2	Relèvement géométrique de la base canonique . . . . .	35
3.2.1	Notations . . . . .	35
3.2.2	Sous-variétés totalement positives de $G$ . . . . .	36
3.2.3	Relevé géométrique des applications $R_{\pm \mathbf{i}}^{\pm \mathbf{i}'}$ . . . . .	37
3.3	Involution de Schützenberger . . . . .	41
3.3.1	Définition sur les tableaux de Young . . . . .	41
3.3.2	Généralisation à $V(\lambda)$ . . . . .	42
3.4	Analogie géométrique de l'involution de Schützenberger . . . . .	45
3.4.1	Relevé géométrique de l'involution $\phi_\lambda$ . . . . .	45
3.4.2	Relevé géométrique de l'involution $\eta_\lambda$ . . . . .	49
3.4.3	Formules des applications inverses . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Dégénérescences toriques des variétés de Richardson</b>	<b>55</b>
4.1	Variétés toriques . . . . .	56
4.1.1	Définition . . . . .	56
4.1.2	Construction à partir d'un polytope . . . . .	60
4.1.3	Exemples . . . . .	68
4.2	Dégénérescences toriques et semi-toriques . . . . .	71
4.2.1	Le problème . . . . .	71
4.2.2	Cas de la variété de drapeaux . . . . .	72
4.2.3	Variété de Schubert . . . . .	75
4.2.4	Variétés de Richardson . . . . .	76
4.2.5	Cas particulier de dégénérescences toriques . . . . .	79
4.2.6	Exemple dans le cas $A_2$ . . . . .	79
4.2.7	Exemples dans le cas $B_2$ . . . . .	80
<b>5</b>	<b>Réalisation des cônes de Lusztig</b>	<b>83</b>
5.1	Cônes de Lusztig; $\mathcal{L}_\mathbf{i}$ . . . . .	83
5.1.1	Monômes serrés . . . . .	83
5.1.2	Définition du cône de Lusztig . . . . .	84
5.2	Algèbres adaptées; $A_\mathbf{i}$ . . . . .	84
5.2.1	Contexte . . . . .	84
5.2.2	Algèbres adaptées standard . . . . .	84
5.3	Réalisation $\mathcal{L}_\mathbf{i} = c_\mathbf{i}\phi(A_\mathbf{i}^\sigma)$ . . . . .	86
5.3.1	Paramètres de $c_\mathbf{i}\phi(A_\mathbf{i}^\sigma)$ . . . . .	86
5.3.2	Générateurs de $\mathcal{L}_\mathbf{i}$ . . . . .	87
<b>A</b>	<b>Formulaire</b>	<b>89</b>
A.1	Applications $\tilde{R}_\mathbf{i}^{\mathbf{i}'}$ . . . . .	89
A.2	Applications $R_\mathbf{i}^{\mathbf{i}'}$ . . . . .	90
	<b>Bibliographie</b>	<b>91</b>

# Chapitre 1

## Notations

Ce chapitre a pour but de fixer les notations pour les données usuelles concernant les représentations des algèbres de Lie semi-simples. Pour plus de définitions et pour les preuves des résultats énoncés, on renvoie aux ouvrages de référence, [6], [13], [18], [19].

### 1.1 Données usuelles

Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie complexe semi-simple dans laquelle on fixe une sous algèbre de Cartan  $\mathfrak{h}$ . La dimension de  $\mathfrak{h}$  est appelée *rang* de  $\mathfrak{g}$ , et on désigne par  $n$  cette dimension.

On rappelle qu'il existe sur  $\mathfrak{g}$  une forme bilinéaire symétrique  $K$  appelée *forme de Killing* qui est non dégénérée sur  $\mathfrak{g}$  et dont la restriction à  $\mathfrak{h}$  est également non dégénérée sur  $\mathfrak{h}$ . Cette forme induit un isomorphisme entre  $\mathfrak{h}$  et le dual  $\mathfrak{h}^*$  des formes linéaires sur  $\mathfrak{h}$ , par l'application  $h \mapsto K(h, ?)$ . La forme de Killing se transporte naturellement sur  $\mathfrak{h}^*$ , on notera :

$$\begin{aligned}(\cdot, \cdot) &: \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h}^* \rightarrow \mathbb{C}, & \text{forme de Killing sur } \mathfrak{h}^* \\ \langle \cdot, \cdot \rangle &: \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}, & \text{le couplage naturel}\end{aligned}$$

La théorie des représentations des algèbres de Lie semi-simples de dimension finie, donne l'existence d'ensembles que l'on désigne par :

$\Delta$  : un sous ensemble fini de  $\mathfrak{h}^*$ , *racines de  $\mathfrak{g}$* ,

$\Delta^+$  : un sous ensemble de  $\Delta$ , *racines positives*,

$\Pi = \{\alpha_i\}_{1 \leq i \leq n}$  : un sous ensemble de  $\Delta$ , *racines simples*,

$\Pi^\vee = \{\alpha_i^\vee\}_{1 \leq i \leq n}$  : un sous ensemble de  $\mathfrak{h}$ , *coracines simples*,

$\{\varpi_i\}_{1 \leq i \leq n}$  : base de  $\mathfrak{h}^*$ , *poids fondamentaux*,

$P = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} \mathbb{Z}\varpi_i$  : un  $\mathbb{Z}$ -module libre, *réseau des poids*,

$P^+ = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} \mathbb{Z}_{\geq 0}\varpi_i$ , *poids dominants*,

et qui sont uniquement déterminés (au choix de  $\Pi$  près) par les conditions suivantes :

- Pour tout  $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ ,  $\alpha \in \Delta$  si et seulement si  $\alpha \neq 0$  et le sous espace  $\mathfrak{g}_\alpha := \{x \in \mathfrak{g} / \forall h \in \mathfrak{h}, h \cdot x = \alpha(h)x\}$  est non trivial.
- $\Pi \subset \Delta$  est une base de  $\mathfrak{h}^*$  telle que l'on peut écrire  $\Delta = \Delta^+ \sqcup (-\Delta^+)$  avec  $\Delta^+ = \Delta \cap \mathbb{N}\Pi$
- Pour toute racine  $\alpha \in \Delta$  la coracine  $\alpha^\vee$  est définie comme l'unique élément de  $\mathfrak{h}$  vérifiant :  $K(\alpha^\vee, h) = \langle \frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)}, h \rangle$  pour tout  $h \in \mathfrak{h}$ .
- Les coracines  $\{\alpha_i^\vee\}_{1 \leq i \leq n}$  forment une base de  $\mathfrak{h}$  dont la base duale associée est  $\{\varpi_i\}_{1 \leq i \leq n}$ , i.e.  $\langle \varpi_i, \alpha_j^\vee \rangle = \delta_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ .

En outre, on sait que  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{h}$  et on pose :

$$\begin{aligned} \mathfrak{n} &= \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha, & \text{sous algèbre nilpotente supérieure} \\ \mathfrak{n}^- &= \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}, & \text{sous algèbre nilpotente inférieure} \\ \mathfrak{b} &= \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}, & \text{sous algèbre de Borel} \\ \mathfrak{b}^- &= \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^-, & \text{sous algèbre de Borel opposée} \end{aligned}$$

La décomposition  $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$  est appelée *décomposition triangulaire* de  $\mathfrak{g}$ .

Soit  $\alpha \in \Delta^+$ , on note aussi parfois  $h_\alpha$  l'élément  $\alpha^\vee$ . On sait qu'on peut choisir des éléments :

$$\begin{cases} e_\alpha \in \mathfrak{n} \\ f_\alpha \in \mathfrak{n}^-, \end{cases} \text{ générateurs de Chevalley}$$

vérifiant :

$$\begin{cases} \mathfrak{g}_\alpha &= \mathbb{C}e_\alpha \\ \mathfrak{g}_{-\alpha} &= \mathbb{C}f_\alpha \\ [h_\alpha, e_\alpha] &= 2e_\alpha \\ [h_\alpha, f_\alpha] &= -2f_\alpha \\ [e_\alpha, f_\alpha] &= h_\alpha \end{cases} \quad (1.1)$$

Ainsi, ce choix étant fait on établit naturellement des isomorphismes d'algèbres de Lie :

$$\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathbb{C}h_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$$

Pour une racine simple  $\alpha_i$  on note plus simplement :

$$e_i := e_{\alpha_i}, f_i := f_{\alpha_i}, h_i := h_{\alpha_i}$$

L'ensemble  $\{e_i, f_i, h_i, 1 \leq i \leq n\}$  engendre l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ .

Pour toutes racines  $\alpha, \beta$ , rappelons que  $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle$  est un entier relatif et  $(\alpha, \alpha)$  un entier positif et pair. On note :

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle, \quad 1 \leq i, j \leq n \\ C &= (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}), \text{ matrice de Cartan de } \mathfrak{g} \end{aligned}$$

Rappelons aussi que  $a_{ii} = 2$  et  $a_{ij} \leq 0$ , pour tout  $1 \leq i \neq j \leq n$ , et qu'en posant  $d_i = (\alpha_i, \alpha_i)/2$ ,  $1 \leq i \leq n$ , on a  $d_i a_{ij} = d_j a_{ji}$ .

## 1.2 Théorème de classification

Les données du paragraphe précédent permettent de classier en différents types toutes les algèbres de Lie semi-simples complexes. Pour plus de précisions, voir [6].

- Type  $A_n$  :  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ ,
- Type  $B_n$  :  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$ ,
- Type  $C_n$  :  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$ ,
- Type  $D_n$  :  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$ ,
- Types exceptionnels :  $E_6, E_7, E_8, F_4, G_2$ .

L'indice dans le type est un entier naturel correspondant au rang de l'algèbre.

## 1.3 Groupe de Weyl

Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie semi-simple dans laquelle on fixe une sous algèbre de Cartan  $\mathfrak{h}$  et un choix de racines simples. On utilise les notations du paragraphe précédent.

A toute racine  $\alpha \in \Delta^+$  on associe un élément de  $\text{End}(\mathfrak{h}^*)$  qui est une réflexion orthogonale, en posant :

$$s_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha, \quad \forall \lambda \in \mathfrak{h}^*, \quad \text{réflexion simple associée à } \alpha$$

On note plus simplement  $s_i$  pour  $s_{\alpha_i}$ .

Ces réflexions engendrent un groupe, noté :

$$W = \langle s_i, 1 \leq i \leq n \rangle \subset \text{End}(\mathfrak{h}^*), \quad \text{groupe de Weyl de } \mathfrak{g}$$

On fait agir  $W$  sur  $\mathfrak{h}$  en identifiant un  $s_i$  avec son adjoint. On a alors :

$$s_i(h) = h - \langle \alpha_i, h \rangle \alpha_i^\vee, \quad \forall h \in \mathfrak{h}$$

On vérifie aisément que la forme  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est  $W$ -invariante.

### Mots réduits :

Il existe une fonction longueur  $\ell$  sur  $W$  qui compte le nombre minimal de réflexions  $s_i$  nécessaires à l'écriture d'un élément. Il est connu qu'il existe un unique élément de longueur maximale ; on le note  $w_0$  et on note  $N := \ell(w_0)$  ( $N$  est également le nombre de racines positives).

On appelle *mot réduit pour*  $w$ , toute suite d'indices  $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_p)$  telle que  $s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_p} = w$ , est une décomposition réduite pour  $w$  (*i.e.*  $p = \ell(w)$ ). Lorsqu'il s'agit d'un mot réduit pour  $w_0$ , on parle de *mot réduit* tout court.

Soit  $w \in W$ , on dit que le mot réduit (pour  $w_0$ )  $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_N)$  est *adapté* à  $w$  si  $s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_p} = w$  où  $p = \ell(w)$ .

**Mouvements de tresse :**

Soit  $d$  l'ordre du produit  $s_i s_j$  dans  $W$ , alors on a :

$$\underbrace{s_i s_j \cdots}_{d \text{ facteurs}} = \underbrace{s_j s_i \cdots}_{d \text{ facteurs}}$$

On appelle  $d$ -mouvement, ou  $d$ -tresse, la substitution dans un mot réduit, d'une séquence  $i, j, i \cdots$  (de longueur  $d$ ) en la séquence  $j, i, j, \cdots$ .

Il est bien connu que deux mots réduits se déduisent l'un de l'autre par une succession de mouvements de tresses.

On rappelle également que l'ordre  $d$  du produit  $s_i s_j$ , peut être déterminé par la matrice de Cartan : si  $a_{ij} a_{ji} = 0, 1, 2$  ou  $3$ , alors respectivement  $d = 2, 3, 4$  ou  $6$ .

**Ordre de Bruhat :**

Soit  $w, \tau \in W$ , et  $\beta \in \Delta^+$ . On note  $w \xrightarrow{\beta} \tau$  si  $\tau = s_\beta w$  et  $\ell(\tau) = \ell(w) + 1$ . L'ordre de Bruhat est défini par :

$$w \leq \tau \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{il existe une suite } (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) \in (\Delta^+)^s \text{ telle que :} \\ w \xrightarrow{\beta_1} s_{\beta_1} w \xrightarrow{\beta_2} \dots \xrightarrow{\beta_s} \tau \end{array} \right.$$

**Involution \* :**

L'élément  $w_0$  induit une involution  $i \mapsto i^*$  sur l'ensemble des indices  $\{1, 2, \dots, n\}$ , définie par la relation :

$$w_0(\alpha_i) = -\alpha_{i^*}$$

Si  $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_N)$  est un mot réduit pour  $w_0$ , on note :

$$\mathbf{i}^* := (i_1^*, i_2^*, \dots, i_N^*)$$

Il n'est pas difficile de voir que  $\mathbf{i}^*$  est encore un mot réduit.

On note également  $\lambda^* := -w_0(\lambda)$ , pour tout  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ .

**1.4 Algèbres enveloppantes**

Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie complexe semi-simple pour laquelle on choisit un système de générateurs  $\{e_i, f_i, h_i, 1 \leq i \leq n\}$  comme au paragraphe (1.1), et on note  $(a_{ij})_{1 \leq i \leq n}$  la matrice de Cartan associée.

On note  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  l'algèbre associative engendrée par  $E_i, F_i, H_i, 1 \leq i \leq n$ , satisfaisant les relations suivantes :

$$\begin{aligned} [H_i, H_j] &= 0 \\ [E_i, F_j] &= \delta_{ij} H_i \\ [H_i, E_j] &= a_{ij} E_j \\ [H_i, F_j] &= -a_{ij} F_j \quad (\text{Relations de Weyl}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{1-a_{ij}} (-1)^s \binom{1-a_{ij}}{s} E_i^{1-a_{ij}-s} E_j E_i^s &= 0, \quad i \neq j \\ \sum_{s=0}^{1-a_{ij}} (-1)^s \binom{1-a_{ij}}{s} F_i^{1-a_{ij}-s} F_j F_i^s &= 0, \quad i \neq j \quad (\text{Relations de Serre}) \end{aligned}$$

$\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  est l'algèbre enveloppante (universelle) de  $\mathfrak{g}$ .

Il existe un morphisme injectif de  $\mathfrak{g}$  dans  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ , qui envoie  $e_i, f_i, h_i$  respectivement sur  $E_i, F_i, H_i, 1 \leq i \leq n$ .

Les algèbres enveloppantes  $\mathcal{U}(\mathfrak{n}), \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-), \mathcal{U}(\mathfrak{h})$  sont les sous algèbres de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  engendrées par les  $E_i$ , resp.  $F_i$ , resp.  $H_i, 1 \leq i \leq n$ . On a un isomorphisme d'espaces vectoriels  $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \simeq \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{h}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{n})$ .

Tout  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ -module est un  $\mathfrak{g}$ -module et réciproquement.

## 1.5 Modules de Weyl et modules de Demazure

Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie complexe semi-simple pour laquelle on fixe une décomposition triangulaire,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$ .

Soit  $M$  un  $\mathfrak{g}$ -module (ou de manière équivalente un  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ -module) de dimension finie. Alors :

$$M = \bigoplus_{\mu \in P} M_\mu, \quad \text{où } M_\mu := \{v \in M / hv = \mu(h)v, \forall h \in \mathfrak{h}\}$$

Les  $M_\mu$  non triviaux sont appelés *sous-espaces de poids* de  $M$ , et leurs éléments non nuls *vecteurs de poids*  $\mu$ .

Un *vecteur de plus haut poids*, resp. de plus bas poids, dans  $M$  est un vecteur de poids satisfaisant :  $\forall e \in \mathfrak{n}, ev = 0$ , resp.  $\forall f \in \mathfrak{n}^-, fv = 0$ .

Dans un module simple il y a (à scalaire près) un unique vecteur de plus haut poids et un unique vecteur de plus bas poids.

### Modules de Weyl :

Le théorème suivant est classique :

**Théorème 1.5.1 (de Weyl).** *Il existe une bijection entre  $P^+$  est l'ensemble des classes d'isomorphismes des modules simples de dimension finie.*

Une construction classique permet d'associer à tout  $\lambda \in P^+$ , un module simple de dimension finie et tel que le vecteur de plus haut poids soit de poids  $\lambda$ . On note alors ce module  $V(\lambda)$  et on l'appelle *module de Weyl* de poids  $\lambda$ .

On notera  $v_\lambda$ , resp.  $v_\lambda^{low}$ , un vecteur de plus haut poids, resp. de plus bas poids, dans  $V(\lambda)$ .

### Modules de Demazure :

Soit  $V(\lambda)$  un module de Weyl. Pour tout élément  $w$  de  $W$ , il existe un unique (à scalaire près) vecteur de poids  $w(\lambda)$ . Notons  $v_{w\lambda}$  un tel vecteur.

Le module de Demazure  $V_w(\lambda)$  est le sous  $\mathcal{U}(\mathfrak{b})$ -module de  $V(\lambda)$ , défini par :

$$V_w(\lambda) := \mathcal{U}(\mathfrak{b})v_{w\lambda}$$

## 1.6 Groupe de Lie

Soit  $G$  un groupe de Lie complexe semi-simple et simplement connexe. On note :

- $T$  : un tore maximal,
- $B$  : un sous-groupe de Borel contenant  $T$ ,
- $U$  : radical unipotent de  $B$  ( $B = UT$ ),
- $B^-$  : sous-groupe de Borel opposé,
- $U^-$  : radical unipotent de  $B^-$ .

Ces données sont équivalentes à la donnée d'une algèbre de Lie complexe semi-simple  $\mathfrak{g}$ , avec une décomposition triangulaire  $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$ . Dans cette correspondance on associe à  $G$  les notions inhérentes à  $\mathfrak{g}$ , comme l'ensemble des racines, la matrice de Cartan, le groupe de Weyl...

Le groupe de Weyl  $W$  associé à  $G$  peut être identifié comme :

$$W \equiv \text{Norm}(T)/T$$

où  $\text{Norm}(T)$  désigne le normalisateur du sous-groupe  $T$ .

### Dual de Langlands :

Dans les cas que nous considérerons, c'est à dire dans le cas des groupes de Lie complexes semi-simples et simplement connexes, le dual de Langlands  $G^\vee$  d'un groupe  $G$  peut être simplement défini comme le groupe de Lie complexe semi-simple et simplement connexe correspondant à la matrice de Cartan transposée de celle de  $G$ .

On peut alors identifier les racines de  $G^\vee$  avec les coracines de  $G$ , et *vice versa*. Les groupes de Weyl sont donc naturellement identifiés.

On utilisera la notation  $(\cdot)^\vee$  pour désigner l'objet dans  $G^\vee$  analogue à celui de  $G$  (par exemple si  $\alpha$  est une racine de  $G$  son analogue dans  $G^\vee$  est

noté  $(\alpha)^\vee = \alpha^\vee$ .

### Variété de drapeaux :

La variété de drapeaux de  $G$  est la variété  $G/B$ , où  $B$  est un sous-groupe de Borel. Les décompositions suivantes sont connues sous le nom de décompositions cellulaires de Bruhat :

$$G/B = \bigcup_{w \in W} BwB/B = \bigcup_{\tau \in W} B^- \tau B/B$$

Les adhérences dans  $G/B$  des cellules définissent des sous-variétés :

- Variétés de Schubert :  $X_w := \overline{BwB/B}$ ,  $w \in W$ ,
- Variétés de Schubert opposées :  $X^\tau := \overline{B^- w_0 \tau B/B}$ ,  $\tau \in W$ ,
- Variétés de Richardson :  $X_w^\tau := X_w \cap X^\tau$ .

Il est connu que :

$$\overline{BwB/B} = \bigsqcup_{v \leq w} BvB/B, \quad \overline{B^- \tau B/B} = \bigsqcup_{v \geq \tau} B^- vB/B$$

$$\dim(X_w) = \ell(w), \quad \dim(X^\tau) = \ell(\tau), \quad \dim(X_w^\tau) = \ell(w) + \ell(\tau) - N$$



## Chapitre 2

# Bases Canoniques

En 1990, Lusztig a construit une base du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$  constituée d'éléments homogènes et compatible avec les idéaux de type  $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)F_i^k$  et  $F_i^k\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$ . La construction de Lusztig se fait dans la déformation quantique  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}^-)$  de  $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$  en modifiant des bases de type Poincaré-Birkhoff-Witt. La base obtenue en "faisant tendre" le paramètre  $q$  vers zéro, coïncide avec la base dite cristalline, introduite par Kashiwara.

Les deux approches de la base canonique procurent des modèles combinatoires riches et très utiles dans l'étude des représentations de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ .

Les références pour ce chapitre sont essentiellement les travaux de Lusztig, [26], [27], [29] et de Kashiwara [20].

Dans ce chapitre nous commençons par rappeler la construction de Lusztig de la base canonique de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}^-)$  et présentons sa spécialisation dans  $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$ . Cette construction permet de définir la paramétrisation de Lusztig de la base canonique. Nous présentons ensuite dans le deuxième sous-chapitre, les opérateurs de Kashiwara et la paramétrisation en cordes de la base canonique. Le troisième sous-chapitre est consacré aux bases canoniques dans les modules simples et à la structure de cristal de ces modules. Au quatrième sous-chapitre nous illustrons ces données en calculant la base canonique en type  $A_2$ . Enfin, nous présentons une algèbre compatible avec la base canonique.

### 2.1 Construction de la base canonique de $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$

Dans cette partie on fixe une algèbre de Lie complexe semi-simple  $\mathfrak{g}$  et on utilise les notations du chapitre 1.

#### 2.1.1 L'algèbre $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}^-)$

Soit  $q$  une indéterminée. On va définir la déformation quantique, notée  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ , de l'algèbre enveloppante  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ .

Tout d'abord on introduit les notations suivantes, pour tout  $k, l, d \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned}
[k]_d &:= \frac{q^{dk} - q^{-dk}}{q^d - q^{-d}} = q^{d(k-1)} + q^{d(k-3)} + \dots + q^{-d(k-1)} \\
[k]_d! &:= [k]_d [k-1]_d \cdots [2]_d [1]_d, \quad [0]_d! = 1 \\
\begin{bmatrix} k+l \\ k \end{bmatrix}_d &:= \frac{[k+l]_d!}{[k]_d! [l]_d!} = \frac{[k+l]_d [k+l-1]_d \cdots [l+1]_d}{[k]_d!}
\end{aligned} \tag{2.1}$$

L'algèbre  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$  est la  $\mathbb{C}(q)$ -algèbre engendrée par :

$$E_i, F_i, K_i, K_i^{-1}, \quad 1 \leq i \leq n$$

satisfaisant :

$$\begin{aligned}
K_i K_i^{-1} &= K_i^{-1} K_i = 1, & K_i K_j &= K_j K_i \\
K_i E_j K_i^{-1} &= q^{d_i a_{ij}} E_j, & K_i F_j K_i^{-1} &= q^{-d_i a_{ij}} F_j \\
E_i F_j - F_j E_i &= \delta_{ij} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q^{d_i} - q^{-d_i}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{s=0}^{1-a_{ij}} (-1)^s \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ s \end{bmatrix}_{d_i} E_i^{1-a_{ij}-s} E_j E_i^s &= 0, \quad i \neq j \\
\sum_{s=0}^{1-a_{ij}} (-1)^s \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ s \end{bmatrix}_{d_i} F_i^{1-a_{ij}-s} F_j F_i^s &= 0, \quad i \neq j
\end{aligned}$$

où  $(a_{ij})_{i,j}$  est la matrice de Cartan et  $(d_i)_i$  des entiers naturels vérifiant  $d_i a_{ij} = d_j a_{ji}$ .

Les relations sont appelées *relations de Serre quantiques*.

On munit l'algèbre  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$  d'une  $Q$ -gradation, où  $Q$  est le  $\mathbb{Z}$ -réseau engendré par les racines simples, en posant :

$$\begin{cases} \deg(E_i) &= \alpha_i, \\ \deg(F_i) &= -\alpha_i, \\ \deg(K_i) &= 0 \end{cases}$$

pour tout  $1 \leq i \leq n$ .

Pour tout élément homogène  $X$  dans  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$  de degré  $\beta$ , on définit ses puissances divisées par :

$$X^{(k)} := \frac{1}{[k]_\beta!} X^k, \quad \text{où } [k]_\beta = [k]_{(\beta, \beta)/2}$$

L'algèbre  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}^-)$  est la sous-algèbre de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ , engendrée par les éléments  $F_i, 1 \leq i \leq n$ .

On note  $\mathcal{A} := \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ , et  $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{n}^-)$  la sous- $\mathcal{A}$ -algèbre de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$  engendrée par les éléments  $F_i^{(k)}$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

G.Lusztig a défini des automorphismes  $T_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$  par :

$$\begin{aligned} T_i(K_j) &= K_j K_i^{-a_{ij}}, \quad 1 \leq j \leq n \\ T_i(E_i) &= -F_i K_i, \quad T_i(F_i) = -K_i^{-1} E_i, \\ T_i(E_j) &= \sum_{k+l=-a_{ij}} (-1)^k q^{-d_i k} E_i^{(l)} E_j E_i^{(k)}, \quad 1 \leq j \neq i \leq n \\ T_i(F_j) &= \sum_{k+l=-a_{ij}} (-1)^k q^{d_i k} F_i^{(k)} F_j F_i^{(l)}, \quad 1 \leq j \neq i \leq n \end{aligned} \quad (2.2)$$

### 2.1.2 Base Poincaré-Birkhoff-Witt

On fixe  $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_N)$  un mot réduit pour  $w_0$ . On définit une suite dans l'ensemble des racines en posant :

$$\beta_{\mathbf{i},1} = \alpha_{i_1}, \beta_{\mathbf{i},2} = s_{i_1}(\alpha_{i_2}), \dots, \beta_{\mathbf{i},N} = s_{i_1} \dots s_{i_{N-1}}(\alpha_{i_N})$$

Il est connu que :

#### Propriété 2.1.1. [34]

- (i) L'ensemble  $\{\beta_{\mathbf{i},k}, 1 \leq k \leq N\}$  est l'ensemble des racines positives  $\Delta^+$ .
  - (ii) L'ordre  $\beta_{\mathbf{i},1} < \beta_{\mathbf{i},2} < \dots < \beta_{\mathbf{i},N}$  définit un ordre convexe sur  $\Delta^+$ .
- (On rappelle qu'un ordre est convexe sur  $\Delta^+$ , s'il a la propriété suivante : pour tout  $\alpha, \beta \in \Delta^+$  tels que  $\alpha + \beta \in \Delta^+$ ,  $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha < \alpha + \beta < \beta$ .)

De manière similaire on fait agir les automorphismes  $T_i$  sur les  $F_i$ , en posant :

$$F_{\beta_{\mathbf{i},1}} = F_{i_1}, F_{\beta_{\mathbf{i},2}} = T_{i_1}(F_{i_2}), \dots, F_{\beta_{\mathbf{i},N}} = T_{i_1} \dots T_{i_{N-1}}(F_{i_N})$$

Les propriétés suivantes sont également bien connues :

#### Propriété 2.1.2. [27]

- (i) Si  $s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_k}$  et  $s_{i'_1} s_{i'_2} \dots s_{i'_k}$  sont deux expressions réduites d'un même élément dans  $W$  alors,

$$T_{i_1} T_{i_2} \dots T_{i_k} = T_{i'_1} T_{i'_2} \dots T_{i'_k}$$

- (ii) Si  $s_{i_1} \dots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k})$  est une racine simple  $\alpha_l$  alors,

$$T_{i_1} \dots T_{i_{k-1}}(F_{i_k}) = F_l$$

- (iii)  $\forall 1 \leq k \leq N$ ,  $F_{\beta_{\mathbf{i},k}}$  est un élément de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}^-)$  homogène de degré  $(-\beta_{\mathbf{i},k})$

On considère les monômes ordonnés :

$$F_{\mathbf{i}}(t) := F_{\beta_{\mathbf{i},1}}^{(t_1)} \dots F_{\beta_{\mathbf{i},N}}^{(t_N)}, \quad t = (t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{N}^N$$

L'ensemble  $\{F_{\mathbf{i}}(t), t \in \mathbb{N}^N\}$  est connu pour être une base de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}^-)$ , dite base de Poincaré-Birkhoff-Witt (abrégé en base PBW) associée au mot réduit  $\mathbf{i}$ .

**Proposition 2.1.3.** [27],[29]

- (i) Le sous  $\mathbb{Z}[q]$ -module de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}^-)$  engendré par les éléments  $F_{\mathbf{i}}(t)$ ,  $t \in \mathbb{N}^N$ , est indépendant du choix de  $\mathbf{i}$ ; on le note  $\mathcal{L}$ .
- (ii) L'image de  $\{F_{\mathbf{i}}(t), t \in \mathbb{N}^N\}$  dans le  $\mathbb{Z}$ -module  $\mathcal{L}/q\mathcal{L}$  est une base de  $\mathcal{L}/q\mathcal{L}$  indépendante du choix de  $\mathbf{i}$ ; on la note  $\mathcal{B}$ .

**Remarque 2.1.4.** La preuve de cette proposition peut se faire par des calculs directs (pénibles) en rang 2. Le cas général s'en déduit en utilisant le fait que deux mots réduits sont liés par une suite de mouvements de tresses. Ainsi on peut montrer que, si  $\mathbf{i}$  et  $\mathbf{i}'$  sont deux mots réduits, pour tout  $t \in \mathbb{N}^N$ , il existe un unique  $t' \in \mathbb{N}^N$  tel que :

$$F_{\mathbf{i}}(t) = F_{\mathbf{i}'}(t') + \sum_s c_{\mathbf{i},\mathbf{i}'}^{t,s} F_{\mathbf{i}'}(s), \quad c_{\mathbf{i},\mathbf{i}'}^{t,s} \in q\mathbb{Z}[q] \quad (2.3)$$

De plus, si  $\mathbf{i}$  et  $\mathbf{i}'$  commencent avec le même indice alors  $t_1 = t'_1 = s_1$  pour tous les  $s$  apparaissant dans la somme de (2.3) et les autres paramètres  $t'_2, \dots, t'_N, s_2, \dots, s_N \dots$  ne dépendent pas de  $t_1$ .

**2.1.3 Base canonique de Lusztig**

On introduit l'automorphisme "bar" de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$  sur  $\mathbb{C}$ , noté  $\bar{\phantom{x}}$  et défini par :

$$\bar{E}_i = E_i, \bar{K}_i = K_i^{-1}, \bar{F}_i = F_i, \bar{q} = q^{-1}, 1 \leq i \leq n$$

**Théoreme 2.1.5.** [29]

- (i) Soit  $\mathbf{i}$  un mot réduit. Pour tout  $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$ , il existe un unique élément  $b_{\mathbf{i}}(t)$  dans  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}^-)$  tel que :

$$\begin{cases} \overline{b_{\mathbf{i}}(t)} = b_{\mathbf{i}}(t) \\ b_{\mathbf{i}}(t) = F_{\mathbf{i}}(t) \pmod{q\mathcal{L}} \end{cases} \quad (2.4)$$

- (ii) L'ensemble  $\mathcal{B} := \{b_{\mathbf{i}}(t), t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N\}$  ne dépend pas du mot réduit choisi  $\mathbf{i}$  et :

- $\mathcal{B}$  est une  $\mathbb{Z}[q]$ -base de  $\mathcal{L}$
- $\mathcal{B}$  est une  $\mathcal{A}$ -base de  $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{n}^-)$ ,
- $\mathcal{B}$  est une  $\mathbb{C}(q)$ -base de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}^-)$ .

$\mathcal{B}$  est appelé base canonique.

**2.1.4 Spécialisation en  $q = 1$** 

On peut remarquer qu'en posant  $q = 1$  dans la présentation de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}^-)$ , on obtient la présentation de  $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$ . Plus précisément, si on considère  $\mathbb{C}$  comme un  $\mathcal{A}$ -module à droite pour l'action triviale  $1 \cdot q = 1$ , on montre que :

**Proposition 2.1.6.** [29] Les  $\mathbb{C}$ -algèbres  $\mathbb{C}_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{U}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{n}^-)$  et  $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$  sont isomorphes, par l'application  $1 \otimes F_i^{(k)} \mapsto F_i^k/k!$ .

On note encore  $\mathcal{B}$  l'image de  $\{1 \otimes b, b \in \mathcal{B}\}$  dans  $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$  par l'application ci-dessus, et on appelle  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$ .

## 2.2 Paramétrisations de la base canonique

### 2.2.1 Paramétrisation de Lusztig

Pour un mot réduit  $\mathbf{i}$  fixé, l'application  $t \mapsto b_{\mathbf{i}}(t)$  de  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^N$  dans  $\mathcal{B}$  est bijective, et donne ainsi une paramétrisation de la base canonique, dite *paramétrisation de Lusztig*.

### 2.2.2 Opérateurs de Kashiwara

Soit  $i \in \{1 \dots n\}$ , on définit des applications  $\mathbb{C}(q)$ -linéaires  $\tilde{E}_i, \tilde{F}_i : \mathcal{U}_q(\mathfrak{n}^-) \rightarrow \mathcal{U}_q(\mathfrak{n}^-)$  par leur action sur une base PBW  $\{F_{\mathbf{i}}(t), t \in \mathbb{N}^N\}$  où  $\mathbf{i}$  est un mot réduit commençant par  $i$  :

$$\begin{aligned} \tilde{F}_i(F_{\mathbf{i}}(t_1, \dots, t_N)) &= F_{\mathbf{i}}(t_1 + 1, t_2, \dots, t_N) \\ \tilde{E}_i(F_{\mathbf{i}}(t_1, \dots, t_N)) &= F_{\mathbf{i}}(t_1 - 1, t_2, \dots, t_N) \text{ ou } 0 \text{ si } t_1 = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

En vertu de la remarque 2.1.4 ces applications sont bien définies (ne dépendent pas du choix de  $\mathbf{i}$ ).

D'après la Proposition 2.1.3 il est clair que les opérateurs  $\tilde{E}_i, \tilde{F}_i, 1 \leq i \leq n$ , stabilisent  $\mathcal{L}$ , et que leurs actions induites à  $\mathcal{L}/q\mathcal{L}$  stabilisent  $\mathcal{B} \cup \{0\}$ . De plus :

**Proposition 2.2.1.** *Pour tout  $b \in \mathcal{B}$ , il existe une suite  $(i_1, i_2, \dots, i_s)$  d'indices tels que :*

$$b = \tilde{F}_{i_1} \tilde{F}_{i_2} \dots \tilde{F}_{i_s} (1 + q\mathcal{L})$$

On relève naturellement les actions des  $\tilde{E}_i, \tilde{F}_i, 1 \leq i \leq n$  sur  $\mathcal{B}$ , en des actions  $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i, 1 \leq i \leq n$  sur  $\mathcal{B}$ . De sorte que l'on a la caractérisation suivante :

**Propriété 2.2.2.** *Soit  $i \in \{1 \dots n\}$  et  $\mathbf{i}$  un mot réduit commençant par  $i$  :*

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i(b_{\mathbf{i}}(t_1, \dots, t_N)) &= b_{\mathbf{i}}(t_1 + 1, t_2, \dots, t_N) \\ \tilde{e}_i(b_{\mathbf{i}}(t_1, \dots, t_N)) &= b_{\mathbf{i}}(t_1 - 1, t_2, \dots, t_N) \text{ ou } 0 \text{ si } t_1 = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Les opérateurs  $\tilde{E}_i, \tilde{F}_i, \tilde{e}_i, \tilde{f}_i, 1 \leq i \leq n$  sont appelés *opérateurs de Kashiwara*.

**Remarque 2.2.3.** Les opérateurs  $\tilde{e}_i$  et  $\tilde{f}_i$  sont (quasi)inverses l'un de l'autre :

$$\begin{aligned} \tilde{e}_i(\tilde{f}_i(b)) &= b \\ \tilde{f}_i(\tilde{e}_i(b)) &= b, \text{ si } \tilde{e}_i(b) \neq 0 \end{aligned}$$

### 2.2.3 Paramétrisation en cordes

Pour  $b \in \mathcal{B}$ , on pose  $\varepsilon_i(b) := \max\{k / \tilde{e}_i^k(b) \neq 0\}$ .

La *paramétrisation en cordes* d'un élément  $b$  de la base canonique, suivant le mot réduit  $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_N)$ , est le  $N$ -uplet  $c_{\mathbf{i}}(b) := (t_1, t_2, \dots, t_N)$  défini récursivement par :

$$t_1 = \varepsilon_{i_1}(b), t_2 = \varepsilon_{i_2}(\tilde{e}_{i_1}^{t_1}(b)), \dots, t_N = \varepsilon_{i_N}(\tilde{e}_{i_{N-1}}^{t_{N-1}} \dots \tilde{e}_{i_1}^{t_1}(b)).$$

Au regard des définitions et de la Proposition 2.2.1 on a :

**Proposition 2.2.4.** Soit  $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_N)$  un mot réduit, et soit  $b \in \mathcal{B}$  tel que  $c_{\mathbf{i}}(b) = (t_1, t_2, \dots, t_N)$  alors on a,

- (i)  $c_{\mathbf{i}}(\tilde{f}_{i_1}(b)) = (t_1 + 1, t_2, \dots, t_N)$ ,
- (ii)  $\tilde{f}_{i_1}^{t_1} \dots \tilde{f}_{i_N}^{t_N}(1) = b$

Par conséquent l'application  $c_{\mathbf{i}} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$  est injective. On note  $\mathcal{C}_{\mathbf{i}}$  l'image dans  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^N$  de l'application  $c_{\mathbf{i}}$ .

**Théorème 2.2.5.** [25] L'ensemble  $\mathcal{C}_{\mathbf{i}}$  est l'ensemble des points à coordonnées entières d'un cône rationnel convexe polyédrique de  $\mathbb{R}^N$ .

De plus on en connaît certaines équations, cf. [25], [5].

## 2.2.4 Applications de changement de paramétrisation

Pour  $\mathbf{i}$  et  $\mathbf{i}'$  deux mots réduits, on introduit les applications de changement de paramétrisation suivantes :

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{i}}^{\mathbf{i}'} &= (b_{\mathbf{i}'})^{-1} \circ b_{\mathbf{i}} : \mathbb{N}^N \rightarrow \mathbb{N}^N, \\ R_{-\mathbf{i}}^{-\mathbf{i}'} &= c_{\mathbf{i}'} \circ (c_{\mathbf{i}})^{-1} : \mathcal{C}_{\mathbf{i}} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbf{i}'}, \\ R_{-\mathbf{i}}^{\mathbf{i}'} &= (b_{\mathbf{i}'})^{-1} \circ (c_{\mathbf{i}})^{-1} : \mathcal{C}_{\mathbf{i}} \rightarrow \mathbb{N}^N, \\ R_{\mathbf{i}}^{-\mathbf{i}'} &= c_{\mathbf{i}'} \circ b_{\mathbf{i}} : \mathbb{N}^N \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbf{i}'}. \end{aligned}$$

On expliquera plus loin comment calculer explicitement ces applications. La connaissance des formules explicites de  $R_{\mathbf{i}}^{\mathbf{i}'}$  et  $R_{-\mathbf{i}}^{-\mathbf{i}'}$  en rang 2 (c'est-à-dire quand  $\mathbf{i}$  et  $\mathbf{i}'$  se déduisent l'un de l'autre par une relation de tresse) permet de déduire les formules en rang quelconque (car  $\mathbf{i}$  et  $\mathbf{i}'$  sont toujours reliés par une suite de mouvements de tresses).

## 2.3 Base canonique dans les modules

### 2.3.1 Théorèmes de compatibilité

Le premier théorème de compatibilité concerne les modules de Weyl  $V(\lambda)$ . On rappelle que  $v_{\lambda}$  est un vecteur de plus haut poids dans  $V(\lambda)$  et que les surjections naturelles :

$$\begin{aligned} \pi_{\lambda} : \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-) &\longrightarrow V(\lambda) \\ u &\longmapsto uv_{\lambda} \end{aligned}$$

ont pour noyau :

$$\ker \pi_{\lambda} := \sum_i \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-) F_i^{\lambda_i + 1}$$

où les  $\lambda_i$  sont les coordonnées de  $\lambda$  dans la base des poids fondamentaux, *i.e.*  $\lambda = \lambda_1 \varpi_1 + \lambda_2 \varpi_2 + \dots + \lambda_n \varpi_n$

On pose :

$$\mathcal{B}(\lambda) = \mathcal{B} \setminus \left( \mathcal{B} \cap \sum_i \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-) F_i^{\lambda_i+1} \right)$$

**Théorème 2.3.1.** [29]  $\mathcal{B}(\lambda)v_\lambda$  est une base de  $V(\lambda)$ , dont les éléments sont des vecteurs de poids.

Le deuxième théorème concerne les modules de Demazure  $V_w(\lambda)$ .

**Théorème 2.3.2.** [20] Pour tout  $w \in W$ , il existe un sous-ensemble  $\mathcal{B}_w \subset \mathcal{B}$  tel que pour tout  $\lambda \in P^+$ , l'ensemble  $(\mathcal{B}_w \cap \mathcal{B}(\lambda))v_\lambda$  est une base de  $V_w(\lambda)$ .

On note  $\mathcal{B}_w(\lambda) := \mathcal{B}_w \cap \mathcal{B}(\lambda)$ . Pour alléger les notations on écrit parfois  $\mathcal{B}(\lambda)$  pour  $\mathcal{B}(\lambda)v_\lambda$  et  $\mathcal{B}_w(\lambda)$  pour  $\mathcal{B}_w(\lambda)v_\lambda$ .

On désigne par  $v_{w\lambda}$  l'unique élément de  $\mathcal{B}_w(\lambda)$  de poids  $w(\lambda)$ . Remarquer que cet élément est unique et plus unique à scalaire près une fois que  $v_\lambda$  est choisi. L'élément  $v_\lambda^{low} = v_{w_0\lambda}$  est l'élément de plus bas poids dans  $\mathcal{B}(\lambda)$ .

### 2.3.2 Paramétrisations de $\mathcal{B}(\lambda)$

Les paramétrisations de la base canonique se comportent bien avec les ensembles  $\mathcal{B}(\lambda)$  et  $\mathcal{B}_w$ . C'est ce que nous allons développer dans cette section.

Fixons  $\mathbf{i}$  un mot réduit,  $\lambda$  un poids dominant, et  $b$  un élément de  $\mathcal{B}(\lambda)$ . Notons  $(t_1, \dots, t_N) = c_{\mathbf{i}}(b)$  ses paramètres en cordes,  $(t'_1, \dots, t'_N) = b_{\mathbf{i}}^{-1}(b)$  les paramètres de Lusztig de  $b$ , et  $\text{wt}(b)$  son poids. Alors (cf. notations du paragraphe 2.1.2) :

$$\begin{aligned} \text{wt}(b) &= \lambda - (t_1\alpha_{i_1} + t_2\alpha_{i_2} + \dots + t_N\alpha_{i_N}) \\ &= \lambda - (t'_1\beta_{i,1} + t'_2\beta_{i,2} + \dots + t'_N\beta_{i,N}) \end{aligned}$$

La paramétrisation en cordes des éléments de la base canonique a des propriétés "géométriques" remarquables. Soit  $\mathbf{i}$  mot réduit, on note :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\mathbf{i}} &:= c_{\mathbf{i}}(\mathcal{B}) \\ \mathcal{C}_{\mathbf{i}}(\lambda) &:= c_{\mathbf{i}}(\mathcal{B}(\lambda)) \\ \mathcal{C}_{\mathbf{i}}^w &:= c_{\mathbf{i}}(\mathcal{B}_w) \\ \mathcal{C}_{\mathbf{i}}^w(\lambda) &:= c_{\mathbf{i}}(\mathcal{B}_w(\lambda)) \end{aligned} \tag{2.7}$$

**Théorème 2.3.3.** [25]

- (i) L'ensemble  $\mathcal{C}_{\mathbf{i}}(\lambda)$  est l'ensemble des points à coordonnées entières d'un polytope rationnel convexe de  $\mathbb{R}^N$ .
- (ii) Si  $\mathbf{i}$  est adapté à  $w$ , alors  $\mathcal{C}_{\mathbf{i}}^w = \mathcal{C}_{\mathbf{i}} \cap \mathbb{N}^{N-\ell(w)}$  est une face du cône  $\mathcal{C}_{\mathbf{i}}$  et  $\mathcal{C}_{\mathbf{i}}^w(\lambda)$  est une face du polytope  $\mathcal{C}_{\mathbf{i}}(\lambda)$ .

De plus, on connaît les paramétrisations en cordes des éléments extrémaux  $v_{w\lambda}$  lorsqu'on choisit un mot réduit adapté à  $w$  :

**Proposition 2.3.4.** [29] Soit  $s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_p}$  une décomposition réduite pour un  $w \in W$  et  $\mathbf{i}$  un mot réduit adapté à  $w$ , alors l'élément  $v_{w\lambda}$  a pour paramètres en cordes  $c_{\mathbf{i}}(v_{w\lambda}) = (t_1, t_2, \dots, t_p, 0, \dots, 0)$  où,

$$t_1 = \langle s_{i_1} w(\lambda), \alpha_{i_1}^\vee \rangle, t_2 = \langle s_{i_2} s_{i_1} w(\lambda), \alpha_{i_2}^\vee \rangle, \dots, t_p = \langle \lambda, \alpha_{i_p}^\vee \rangle$$

Enfin, il est intéressant de connaître les paramétrisations de l'élément de plus bas poids  $v_\lambda^{low}$  de  $\mathcal{B}(\lambda)$ . Les paramètres en cordes s'obtiennent comme un cas particulier de la proposition ci-dessus. Les paramètres de Lusztig ont été calculés dans [9] :

**Proposition 2.3.5.** Soit  $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_N)$  un mot réduit de  $w_0$ , et  $v_\lambda^{low}$  l'élément de plus bas poids de  $\mathcal{B}(\lambda)$ , alors :

$$\begin{aligned} c_{\mathbf{i}}(v_\lambda^{low}) &= \left( \langle \lambda^*, s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k}^\vee) \rangle \right)_{1 \leq k \leq N} \\ b_{\mathbf{i}}^{-1}(v_\lambda^{low}) &= \left( \langle \lambda^*, \alpha_{i_k}^\vee \rangle \right)_{1 \leq k \leq N} \end{aligned} \quad (2.8)$$

### 2.3.3 Graphes cristallins

Soit  $\lambda$  un poids dominant. On définit les opérateurs de Kashiwara  $\tilde{f}_i, \tilde{e}_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  sur  $\mathcal{B}(\lambda)$  par :

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i : \mathcal{B}(\lambda) &\longrightarrow \mathcal{B}(\lambda) \sqcup \{0\}, & \tilde{e}_i : \mathcal{B}(\lambda) &\longrightarrow \mathcal{B}(\lambda) \sqcup \{0\} \\ bv_\lambda &\mapsto \tilde{f}_i(b)v_\lambda, & bv_\lambda &\mapsto \tilde{e}_i(b)v_\lambda \end{aligned}$$

Le *graphe cristallin*  $\mathcal{G}_\lambda$  de  $V(\lambda)$  est le graphe coloré par  $\{1, 2, \dots, n\}$  défini par :

- sommets : les éléments  $b \in \mathcal{B}(\lambda)$
- flèches :  $b \xrightarrow{i} b'$  si et seulement si  $b' = \tilde{f}_i(b)$ .

**Remarque 2.3.6.** D'après la Proposition 2.2.4(ii), ce graphe est connexe.

On note :

$$\varepsilon_i(b) := \max\{k / \tilde{e}_i^k(b) \neq 0\}, \quad \varphi_i(b) := \max\{k / \tilde{f}_i^k(b) \neq 0\} \quad (2.9)$$

Soit  $\lambda$  et  $\mu$  deux poids dominants. On définit les opérateurs  $\tilde{f}_i, \tilde{e}_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , sur  $\mathcal{B}(\lambda) \otimes \mathcal{B}(\mu)$  par :

$\forall b_1 \otimes b_2 \in \mathcal{B}(\lambda) \otimes \mathcal{B}(\mu) :$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i(b_1 \otimes b_2) &= \begin{cases} \tilde{f}_i(b_1) \otimes b_2 & \text{si } \varphi_i(b_1) > \varepsilon_i(b_2) \\ b_1 \otimes \tilde{f}_i(b_2) & \text{si } \varphi_i(b_1) \leq \varepsilon_i(b_2) \end{cases} \\ \tilde{e}_i(b_1 \otimes b_2) &= \begin{cases} \tilde{e}_i(b_1) \otimes b_2 & \text{si } \varphi_i(b_1) \geq \varepsilon_i(b_2) \\ b_1 \otimes \tilde{e}_i(b_2) & \text{si } \varphi_i(b_1) < \varepsilon_i(b_2) \end{cases} \end{aligned}$$

On peut construire de manière analogue le graphe cristallin  $\mathcal{G}_{\lambda \otimes \mu}$  de  $V(\lambda) \otimes V(\mu)$ .

Considérons la décomposition en composantes irréductibles :

$$V(\lambda) \otimes V(\mu) = \bigoplus_{\nu \in \mathcal{D}(\lambda, \mu)} V(\nu)$$

où l'ensemble  $\mathcal{D}(\lambda, \mu)$  peut contenir des répétitions.

La description suivante est due à Kashiwara :

**Théorème 2.3.7.** [20]

$$(i) \mathcal{G}_{\lambda \otimes \mu} = \bigsqcup_{\nu \in \mathcal{D}(\lambda, \mu)} \mathcal{G}_{\nu}$$

$$(ii) \mathcal{D}(\lambda, \mu) = \{\lambda + \text{wt}(b), b \in \mathcal{B}(\mu) / \varepsilon_i(b) \leq \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle, \forall 1 \leq i \leq n\}$$

**Remarque 2.3.8.** Le graphe cristallin  $\mathcal{G}_{\lambda + \mu}$  se déduit des graphes  $\mathcal{G}_{\lambda}$  et  $\mathcal{G}_{\mu}$ . C'est la composante connexe de  $1 \otimes 1$  dans le graphe  $\mathcal{G}_{\lambda \otimes \mu}$ .

**Remarque 2.3.9.** Connaissant le graphe  $\mathcal{G}_{\mu}$ , on peut déterminer aisément l'ensemble  $\mathcal{D}(\lambda, \mu)$ , pour tout  $\lambda$  et ainsi en déduire les composantes irréductibles de  $V(\lambda) \otimes V(\mu)$ .

### 2.3.4 Tableaux de Young

Dans ce paragraphe on fixe  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$ . Dans ce cas la théorie des représentations peut s'appuyer sur la combinatoire des tableaux de Young. On donne ici le lien entre la combinatoire des tableaux de Young et celle basée sur les paramétrisations de la base canonique.

**Définition 2.3.10.** Soit  $\lambda = \lambda_1 \varpi_1 + \lambda_2 \varpi_2 + \dots + \lambda_n \varpi_n$  un élément de  $P^+$ , on appelle tableau de Young de forme  $\lambda$  le tableau obtenu en mettant côte à côte en partant de la gauche  $\lambda_n$  colonnes à  $n$  lignes, puis  $\lambda_{n-1}$  colonnes à  $n-1$  lignes, etc... jusqu'à  $\lambda_1$  colonnes à 1 ligne.

**Définition 2.3.11.** Un tableau de Young de forme  $\lambda$  est dit semi-standard s'il est rempli avec les entiers de 1 à  $n+1$  de sorte que ce soit strictement croissant sur les colonnes et croissant sur les lignes.

**Exemple 2.3.12.** Soit  $n \geq 3$ , le tableau suivant est un tableau de Young semi-standard de forme  $2\varpi_1 + 2\varpi_2 + \varpi_3$  :

1	2	2	3	4
2	3	4		
4				

On note  $Y(\lambda)$  l'ensemble des tableaux de Young semi-standards de forme  $\lambda$ . Kashiwara a montré, [20], comment identifier les ensembles  $Y(\lambda)$  et  $\mathcal{B}(\lambda)$ . Notons :

$$\begin{aligned} Y(\lambda) &\longrightarrow \mathcal{B}(\lambda) \\ T &\longmapsto b_T \end{aligned}$$

La combinatoire des tableaux de Young est un cas particulier de celle donnée par les paramétrisations de la base canonique. En effet, dans le cas  $A_n$  l'élément  $w_0$  a une décomposition réduite remarquable selon le mot :

$$\mathbf{i} = (1, 2, 1, \dots, n, n-1, \dots, 2, 1)$$

On appellera ce mot *mot réduit standard*.

Soit  $T \in Y(\lambda)$ , notons :

$$(t_{11}, t_{12}, t_{22}, t_{13}, t_{23}, t_{33} \cdots, t_{1n}, \cdots, t_{nn}) = b_{\mathbf{i}}^{-1}(b_T)$$

les paramètres de Lusztig de l'élément  $b_T$  selon le mot standard  $\mathbf{i}$ , et,

$$(c_{11}, c_{22}, c_{12}, c_{33}, c_{23}, c_{13} \cdots, c_{nn}, \cdots, c_{1n}) = c_{\mathbf{i}}(b_T)$$

ses paramètres en cordes selon le mot standard  $\mathbf{i}$

**Proposition 2.3.13.** [4] Avec les notations ci-dessus :

$$\begin{aligned} t_{ij} &= (\text{le nombre de } j+1 \text{ dans la } i\text{-ème ligne de } T), \quad i \leq j \\ c_{ij} &= (\text{le nombre de } j+1 \text{ dans les } i \text{ premières lignes de } T), \quad i \leq j \end{aligned}$$

En corollaire on peut donner les applications  $R_{\mathbf{i}}^{-1}$  et  $R_{-\mathbf{i}}^{\mathbf{i}}$  :

**Corollaire 2.3.14.** Avec les notations ci-dessus :

$$\begin{aligned} t_{ij} &= c_{ij} - c_{i-1,j}, \quad 1 \leq i \leq j \leq n \\ c_{ij} &= t_{1j} + t_{2j} + \cdots + t_{ij}, \quad 1 \leq i \leq j \leq n \end{aligned}$$

## 2.4 Exemple : base canonique pour $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$

Cette base a été calculée dans [29]. On donne ici le détail des calculs. Pour d'autres exemples en d'autre type, voir par exemple [39], [40].

### 2.4.1 Base canonique dans $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}^-)$

Dans cette section  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ . En suivant la construction donnée dans la section précédente on calcule la base canonique de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}^-)$ .

On rappelle que  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}^-)$  est une algèbre associative engendrée par deux éléments  $F_1$  et  $F_2$  satisfaisant les relations de Serre quantiques suivantes :

$$\begin{cases} F_1^2 F_2 - (q + q^{-1}) F_1 F_2 F_1 + F_2 F_1^2 = 0 \\ F_2^2 F_1 - (q + q^{-1}) F_2 F_1 F_2 + F_1 F_2^2 = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

Choisissons le mot réduit standard  $\mathbf{i} = (1, 2, 1)$ . Ceci nous donne une énumération des racines positives :

$$\beta_1 = \alpha_1, \quad \beta_2 = s_1(\alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \beta_3 = s_1 s_2(\alpha_1) = \alpha_2$$

Les éléments  $F_\beta$  correspondant se calculent par :

$$F_{\beta_1} = F_1, \quad F_{\beta_2} = T_1(F_2), \quad F_{\beta_3} = T_1T_2(F_1)$$

où  $T_1$  et  $T_2$  sont les automorphismes de tresses définis par (2.2). On sait d'ores et déjà que  $F_{\beta_3} = T_1T_2(F_1) = F_2$  car  $\beta_3$  est la racine simple  $\alpha_2$ . Reste à calculer  $T_1(F_2)$ , on obtient :

$$T_1(F_2) = F_2F_1 - qF_1F_2 =: F_{12}$$

On remarque facilement des relations de  $q$ -commutation suivantes :

$$F_1F_{12} = q^{-1}F_{12}F_1, \quad F_2F_{12} = qF_{12}F_2 \quad (2.11)$$

Les monômes  $F_{121}^{(a,b,c)} := F_1^{(a)}F_{12}^{(b)}F_2^{(c)}$ ,  $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ , forment une base PBW de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}^-)$  associée au mot réduit  $(1, 2, 1)$ .

Le but est maintenant de trouver pour tout  $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$  un élément  $b_{121}(a, b, c)$  tel que :

$$\begin{cases} \bar{b}_{121}(a, b, c) &= b_{121}(a, b, c) \\ b_{121}(a, b, c) &= F_{121}^{(a,b,c)} + \sum_s c_s F_{121}^{(s)}, \text{ avec } c_s \in q\mathbb{Z}[q] \end{cases} \quad (2.12)$$

On va montrer :

**Proposition 2.4.1.**  $\forall (a, b, c) \in \mathbb{N}^3$  :

$$b_{121}(a, b, c) = \begin{cases} F_1^{(a)}F_2^{(b+c)}F_1^{(b)}, & \text{si } a \leq c \\ F_2^{(b)}F_1^{(a+b)}F_2^{(c)}, & \text{si } a > c \end{cases}$$

**Preuve** — L'idée est de décomposer les monômes  $F_1^{(a)}F_2^{(b+c)}F_1^{(b)}$  et  $F_2^{(b)}F_1^{(a+b)}F_2^{(c)}$  dans la base PBW ci-dessus. Pour ce faire on commence par établir la décomposition suivante :

**Formule 2.13.**  $\forall s \in \mathbb{N}, \forall r \in \mathbb{N}$ ,

$$F_2^{(r)}F_1^{(s)} = \sum_{0 \leq n \leq \min(r,s)} q^{(r-n)(s-n)} F_1^{(s-n)} F_{12}^{(n)} F_2^{(r-n)}$$

La formule est claire si  $rs = 0$ . On procède par récurrence sur  $s$  :

•  $s = 1$  : on veut montrer que pour tout  $r \geq 1$  on a :

$$F_2^{(r)}F_1 = q^r F_1 F_2^{(r)} + F_{12} F_2^{(r-1)}$$

On raisonne alors par récurrence sur  $r$ . Cela se fait sans difficultés en utilisant la définition de  $F_{12}$  et les relations de  $q$ -commutation (2.11).

• vraie au rang  $s$  : montrons la formule au rang  $s + 1$ . On note  $m = \min(r, s)$ .

$$\begin{aligned} F_2^{(r)}F_1^{(s+1)} &= [s+1]^{-1} F_2^{(r)}F_1^{(s)}F_1 \\ &= [s+1]^{-1} \sum_{0 \leq n \leq m} \underbrace{q^{(r-n)(s-n)} F_1^{(s-n)} F_{12}^{(n)} F_2^{(r-n)}}_{=: t_n} F_1 \end{aligned}$$

On utilise le fait que la formule est vraie pour tout  $r$  quand  $s = 1$ , pour ré-écrire la queue du terme général  $t_n$  dans la somme ci dessus, puis on développe et on réarrange :

$$\begin{aligned}
& F_1^{(s-n)} F_{12}^{(n)} F_2^{(r-n)} F_1 \\
= & F_1^{(s-n)} F_{12}^{(n)} (q^{r-n} F_1 F_2^{(r-n)} + F_{12} F_2^{(r-n-1)}) \\
= & q^{(r-n)} F_1^{(s-n)} F_{12}^{(n)} F_1 F_2^{(r-n)} + F_1^{(s-n)} F_{12}^{(n)} F_{12} F_2^{(r-n-1)} \\
= & [s+1-n] q^{(r-n)} q^n F_1^{(s+1-n)} F_{12}^{(n)} F_2^{(r-n)} + [n+1] F_1^{(s-n)} F_{12}^{(n+1)} F_2^{(r-n-1)}
\end{aligned}$$

On multiplie par  $q^{(r-n)(s-n)}$  pour avoir  $t_n$ , et on réorganise les puissances de  $q$  :

$$\begin{aligned}
t_n = & [s+1-n] q^n q^{(r-n)(s+1-n)} F_1^{(s+1-n)} F_{12}^{(n)} F_2^{(r-n)} + \\
& [n+1] q^{(s-n)} q^{(r-(n+1))(s+1-(n+1))} F_1^{(s+1-(n+1))} F_{12}^{(n+1)} F_2^{(r-(n+1))}
\end{aligned}$$

En posant  $a_n = q^{(r-n)(s+1-n)} F_1^{(s+1-n)} F_{12}^{(n)} F_2^{(r-n)}$ , on remarque ce terme est de la forme :

$$t_n = [s+1-n] q^n a_n + [n+1] q^{(s-n)} a_{n+1}$$

En faisant la somme de ces termes de 0 à  $m$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{0 \leq n \leq m} t_n &= \sum_{0 \leq n \leq m} \left( [s+1-n] q^n a_n + [n+1] q^{(s-n)} a_{n+1} \right) \\
&= [s+1] a_0 + \sum_{1 \leq n \leq m} \underbrace{([s+1-n] q^n + [n] q^{(s+1-n)})}_{[s+1]} a_n + [m+1] q^{(s-m)} a_{m+1} \\
&= \sum_{0 \leq n \leq m} [s+1] a_n + [m+1] q^{(s-m)} a_{m+1}
\end{aligned}$$

Si  $s < r$ , on a  $[m+1] q^{(s-m)} a_{m+1} = [s+1] a_{m+1}$  et  $m+1 = \min(r, s+1)$  ;

Sinon  $r \geq s+1$ , et on a  $[m+1] q^{(s-m)} a_{m+1} = 0$  et  $m = \min(r, s+1)$ .

Dans tous les cas on peut intégrer le dernier terme sous le signe somme, de sorte que :

$$\sum_{0 \leq n \leq m} t_n = \sum_{0 \leq n \leq \min(r, s+1)} [s+1] a_n$$

Et donc, finalement :

$$\begin{aligned}
F_2^{(r)} F_1^{(s+1)} &= [s+1]^{-1} \sum_{0 \leq n \leq \min(r, s+1)} [s+1] a_n \\
&= \sum_{0 \leq n \leq \min(r, s+1)} a_n \\
&= \sum_{0 \leq n \leq \min(r, s+1)} q^{(r-n)(s+1-n)} F_1^{(s+1-n)} F_{12}^{(n)} F_2^{(r-n)}
\end{aligned}$$

Ce qui établit la formule 2.13 au rang  $s + 1$ .

On peut facilement déduire de la formule 2.13, les deux formules suivantes :

**Formule 2.14.**  $\forall t \in \mathbb{N}, \forall s \in \mathbb{N}, \forall r \in \mathbb{N}$ ,

$$F_2^{(r)} F_1^{(s)} F_2^{(t)} = \sum_{0 \leq n \leq \min(r,s)} q^{(r-n)(s-n)} \begin{bmatrix} r-n+t \\ r-n \end{bmatrix} F_1^{(s-n)} F_{12}^{(n)} F_2^{(r-n+t)}$$

**Formule 2.15.**  $\forall t \in \mathbb{N}, \forall s \in \mathbb{N}, \forall r \in \mathbb{N}$ ,

$$F_1^{(r)} F_2^{(s)} F_1^{(t)} = \sum_{0 \leq n \leq \min(s,t)} q^{(t-n)(s-n)} \begin{bmatrix} r+t-n \\ t-n \end{bmatrix} F_1^{(r+t-n)} F_{12}^{(n)} F_2^{(s-n)}$$

On s'intéresse maintenant aux coordonnées des monômes  $F_2^{(r)} F_1^{(s)} F_2^{(t)}$  et  $F_1^{(r)} F_2^{(s)} F_1^{(t)}$  dans la base PBW. On utilise un résultat préliminaire concernant les coefficients binômiaux quantiques :

**Lemme 2.4.2.**  $\forall a \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$ ,

$$q^{ak} \begin{bmatrix} a+k \\ a \end{bmatrix} = 1 + q\mathbb{Z}[q] \quad (2.16)$$

On va montrer ce résultat par une récurrence sur  $(a, k)$ . La formule est triviale si  $a$  ou  $k$  est nul.

•si  $k = 1$ , alors

$$\begin{aligned} q^a \begin{bmatrix} a+1 \\ a \end{bmatrix} &= q^a [a+1] = q^a (q^{-a} + q^{2-a} + \dots + q^{a-2} + q^a) \\ &= 1 + \underbrace{q^2 + \dots + q^{2a}}_{\in q\mathbb{Z}[q]} \end{aligned}$$

La formule est vraie pour tous les couples de la forme  $(a, 1)$ ,  $a \in \mathbb{N}$ .

•si  $a = 1$ , on montre de même que la formule est vraie pour tous les couples de la forme  $(1, k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

•soient  $a \in \mathbb{N}$  et  $k \in \mathbb{N}$ , on suppose la formule vraie pour les couples  $(a, k-1)$  et  $(a-1, k)$ . Montrons qu'elle est vraie pour  $(a, k)$ . Un calcul direct donne un analogue quantique de la formule du binôme :

$$\begin{bmatrix} a+k \\ a \end{bmatrix} = q^{-a} \begin{bmatrix} a+k-1 \\ a \end{bmatrix} + q^{k+1} \begin{bmatrix} a+k-1 \\ a-1 \end{bmatrix}$$

On obtient en utilisant l'hypothèse :

$$\begin{aligned} q^{ak} \begin{bmatrix} a+k \\ a \end{bmatrix} &= \underbrace{q^{a(k-1)} \begin{bmatrix} a+k-1 \\ a \end{bmatrix}}_{\in 1+q\mathbb{Z}(q)} + q^{2k+1} \underbrace{q^{(a-1)k} \begin{bmatrix} a+k-1 \\ a-1 \end{bmatrix}}_{\in 1+q\mathbb{Z}(q)} \\ &= 1 + q\mathbb{Z}[q] \end{aligned}$$

Le lemme est démontré.

Considérons un monôme  $F_1^{(r)} F_2^{(s)} F_1^{(t)}$  avec  $s \geq r+t$ . On a alors  $\min(s, t) = t$ , la formule 2.15 s'écrit :

$$F_1^{(r)} F_2^{(s)} F_1^{(t)} = F_1^{(r)} F_{12}^{(t)} F_2^{(s-t)} + \sum_{0 \leq n < t} c_{r,s,t}^n(q) F_1^{(r+t-n)} F_{12}^{(n)} F_2^{(s-n)}$$

où l'on a posé  $c_{r,s,t}^n(q) := q^{(t-n)(s-n)} \begin{bmatrix} r+t-n \\ t-n \end{bmatrix}$ .

Compte tenu du fait que  $s \geq r+t$  et  $1 \leq n < t$ , et par le lemme 2.4.2 on en déduit :

$$\begin{aligned} c_{r,s,t}^n(q) &= q^{(t-n)(s-n-r)} \underbrace{q^{r(t-n)} \begin{bmatrix} r+t-n \\ t-n \end{bmatrix}}_{\in 1+q\mathbb{Z}[q]} \\ &\in q\mathbb{Z}[q] \end{aligned}$$

De plus, il est clair que  $F_1^{(r)} F_2^{(s)} F_1^{(t)}$  est stable par l'automorphisme bar. C'est donc un élément de la base canonique! Avec les notations de 2.12,  $F_1^{(r)} F_2^{(s)} F_1^{(t)} = b_{121}(r, t, s-t)$ .

En réindexant, on obtient que  $b_{121}(a, b, c) = F_1^{(a)} F_2^{(b+c)} F_1^{(b)}$  si  $a \leq c$ . Ce qui est le premier cas de la proposition 2.4.1.

De même, en considérant le monôme  $F_2^{(r)} F_1^{(s)} F_2^{(t)}$  avec  $s \geq r+t$ , on trouve grâce à la formule 2.14 et au lemme 2.4.2 que c'est l'élément de la base canonique  $b_{121}(s-r, r, t)$ .

En réindexant, on obtient  $b_{121}(a, b, c) = F_2^{(b)} F_1^{(a+b)} F_2^{(c)}$ , si  $a \geq c$ . Ce qui termine la démonstration de la proposition 2.4.1.

□

On peut remarquer en utilisant les relations de Serre que si  $a = c$ ,

$$F_1^{(a)} F_2^{(b+c)} F_1^{(b)} = F_2^{(b)} F_1^{(a+b)} F_2^{(c)}$$

**Conclusion** : La base canonique de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}^-)$  dans le cas  $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$  est :

$$\mathcal{B} = \left\{ F_1^{(a)} F_2^{(b+c)} F_1^{(b)}, a \leq c \right\} \cup \left\{ F_2^{(b)} F_1^{(a+b)} F_2^{(c)}, a \geq c \right\} \quad (2.17)$$

### 2.4.2 Base canonique dans $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$

En spécialisant le résultat ci-dessus à  $q = 1$ , on obtient :

$$\mathcal{B} = \left\{ F_1^a F_2^{b+c} F_1^b, a \leq c \right\} \cup \left\{ F_2^b F_1^{a+b} F_2^c, a \geq c \right\}$$

Rappelons que les relations de Serre sont les suivantes :

$$\begin{cases} F_1^2 F_2 - 2F_1 F_2 F_1 + F_2 F_1^2 = 0 \\ F_2^2 F_1 - 2F_2 F_1 F_2 + F_1 F_2^2 = 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

Si bien que l'on a encore  $F_1^a F_2^{b+c} F_1^b = F_2^b F_1^{a+b} F_2^c$  si  $a = c$ .

### 2.4.3 Bases dans $V(\lambda)$

En général, si  $\lambda = \lambda_1 \varpi_1 + \lambda_2 \varpi_2 + \cdots + \lambda_n \varpi_n$  est un poids dominant, alors la base canonique  $\mathcal{B}(\lambda)$  du module  $V(\lambda)$  est :

$$\mathcal{B}(\lambda) = \mathcal{B} \setminus \left( \mathcal{B} \cap \sum_i \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-) F_i^{\lambda_i+1} \right)$$

Ici, dans le cas  $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ , si  $\lambda = \lambda_1 \varpi_1 + \lambda_2 \varpi_2$ , on a :

$$\mathcal{B}(\lambda) = \mathcal{B} \setminus \left( \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-) F_1^{\lambda_1+1} + \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-) F_2^{\lambda_2+1} \right)$$

**Exemple 2.4.3.** Prenons  $\lambda = \varpi_1 + \varpi_2$ ,

$$\mathcal{B}(\lambda) = \{1, F_1, F_2 F_1, F_2^2 F_1, F_1 F_2^2 F_1, F_2, F_1 F_2, F_1^2 F_2\}$$

On voit facilement que ces éléments sont bien dans  $\mathcal{B}(\lambda)$ , on montre qu'il n'y en a pas d'autres, soit en utilisant les relations de Serre, soit en se souvenant que  $\dim V(\lambda) = 8$ .

On peut donner leurs paramètres de Lusztig selon  $\mathbf{i} = (1, 2, 1)$ , en utilisant la Proposition 2.4.1. On a :

$$\begin{aligned} 1 &= b_{121}(0, 0, 0) \\ F_1 &= b_{121}(1, 0, 0) \\ F_2 F_1 &= b_{121}(0, 1, 0) \\ F_2^2 F_1 &= b_{121}(0, 1, 1) \\ F_1 F_2^2 F_1 &= b_{121}(1, 1, 1) \\ F_2 &= b_{121}(0, 0, 1) \\ F_1 F_2 &= b_{121}(1, 0, 1) \\ F_1^2 F_2 &= b_{121}(2, 0, 1) \end{aligned}$$

### 2.4.4 Changement de mot réduit

Dans les sections précédentes on a fait le choix de  $\mathbf{i} = (1, 2, 1)$ . On peut regarder ce qui se passe pour  $\mathbf{i} = (2, 1, 2)$ . L'énumération des racines positives devient :

$$\beta_1 = \alpha_2, \quad \beta_2 = s_2(\alpha_1) = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \beta_3 = \alpha_1$$

Les éléments  $F_\beta$  associés sont :

$$F_{\beta_1} = F_2, \quad F_{\beta_2} = F_1 F_2 - q F_2 F_1 =: F_{21}, \quad F_{\beta_3} = F_1$$

On travaille avec la base PBW  $\{F_2^{(a)} F_{21}^{(b)} F_1^{(c)}, (a, b, c) \in \mathbb{N}^3\}$ . On remarque que toutes les relations et formules qu'on obtient sont analogues aux précédentes par la permutation  $1 \leftrightarrow 2$ . On obtient ainsi les formules analogues aux Formules 2.14 et 2.15 :

$$\left\{ \begin{aligned} F_1^{(r)} F_2^{(s)} F_1^{(t)} &= \sum_{0 \leq n \leq \min(r,s)} q^{(r-n)(s-n)} \begin{bmatrix} r-n+t \\ r-n \end{bmatrix} F_2^{(s-n)} F_{21}^{(n)} F_1^{(r-n+t)} \\ F_2^{(r)} F_1^{(s)} F_2^{(t)} &= \sum_{0 \leq n \leq \min(s,t)} q^{(t-n)(s-n)} \begin{bmatrix} r+t-n \\ t-n \end{bmatrix} F_2^{(r+t-n)} F_{21}^{(n)} F_1^{(s-n)} \end{aligned} \right.$$

Et par les mêmes arguments que précédemment, on en déduit :

$$b_{212}(a', b', c') = \begin{cases} F_2^{(a')} F_1^{(b'+c')} F_2^{(b')}, & \text{si } a' \leq c' \\ F_1^{(b')} F_2^{(a'+b')} F_1^{(c')}, & \text{si } a' > c' \end{cases}$$

On peut alors déduire les formules de changement de paramètres :

Si  $a \leq c$ ,

$$\begin{aligned} b_{121}(a, b, c) &= F_1^{(a)} F_2^{(b+c)} F_1^{(b)} \\ &= F_1^{(a)} F_2^{((b+c-a)+a)} F_1^{(b)} \\ &= b_{212}(b+c-a, a, b) \end{aligned}$$

Si  $a > c$ ,

$$\begin{aligned} b_{121}(a, b, c) &= F_2^{(b)} F_1^{(a+b)} F_2^{(c)} \\ &= F_2^{(b)} F_1^{(c+(a+b-c))} F_2^{(c)} \\ &= b_{212}(b, c, a+b-c) \end{aligned}$$

Ce qui se résume en :

$$b_{121}(a, b, c) = b_{212}(b+c-\min(a, c), \min(a, c), a+b-\min(a, c)) \quad (2.19)$$

**Exemple 2.4.4.**

$$\begin{aligned} 1 &= b_{212}(0, 0, 0) \\ F_1 &= b_{212}(0, 0, 1) \\ F_2 F_1 &= b_{212}(1, 0, 1) \\ F_2^2 F_1 &= b_{212}(2, 0, 1) \\ F_1 F_2^2 F_1 &= b_{212}(1, 1, 1) \\ F_2 &= b_{212}(1, 0, 0) \\ F_1 F_2 &= b_{212}(0, 1, 0) \\ F_1^2 F_2 &= b_{212}(0, 1, 1) \end{aligned}$$

La connaissance de l'application de reparamétrisation (2.19) permet de tracer le graphe cristallin des bases  $\mathcal{B}(\lambda)$ .

**Exemple 2.4.5.** Graphe cristallin de  $V(\varpi_1 + \varpi_2)$ .

Pour tracer ce graphe on fait agir les opérateurs  $f_1$  et  $f_2$  sur les éléments :

$$1, F_1, F_2 F_1, F_2^2 F_1, F_1 F_2^2 F_1, F_2, F_1 F_2, F_1^2 F_2$$

Par exemple,

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{f}_1(F_1 F_2) = \tilde{f}_1 b_{121}(1, 0, 1) = b_{121}(0, 0, 1) \\ \quad = F_2 \\ \tilde{f}_2(F_2 F_1) = \tilde{f}_2 b_{121}(0, 1, 0) = \tilde{f}_2 b_{212}(1, 0, 1) = b_{212}(0, 0, 1) \\ \quad = F_1 \\ \dots \end{array} \right.$$

On obtient le graphe Figure 2.1.

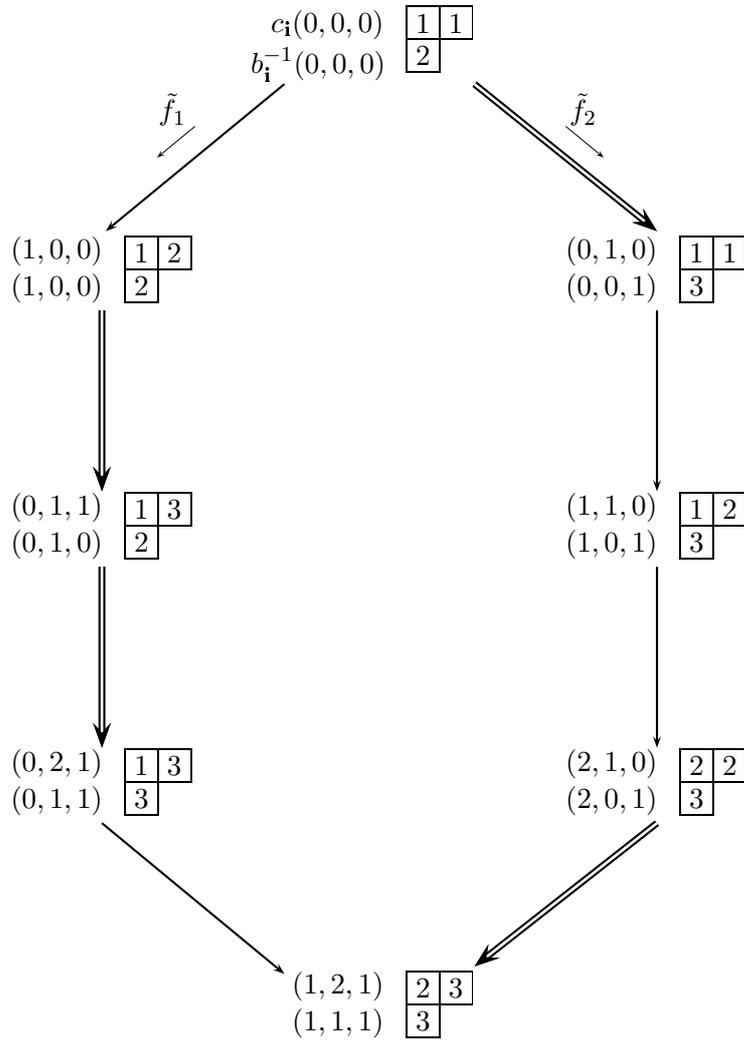


FIG. 2.1 – Graphe cristallin de  $\mathcal{B}(\varpi_1 + \varpi_2)$ , paramétrisations des éléments de  $\mathcal{B}(\varpi_1 + \varpi_2)$  pour  $\mathbf{i} = (1, 2, 1)$ .

### 2.4.5 Paramétrisations en cordes

Pour calculer les paramètres en cordes d'un élément de la base canonique, on utilise la définition donnée en 2.2.3 et le calcul obtenu en 2.19 ;

Posons  $(a', b', c') = c_{121}(b_{121}(a, b, c))$ . On obtient :

$$\begin{cases} a' &= \varepsilon_1(b_{121}(a, b, c)) = a \\ b' &= \varepsilon_2(b_{121}(0, b, c)) = \varepsilon_2(b_{212}(b + c, 0, b)) = b + c \\ c' &= \varepsilon_1(b_{212}(0, 0, b)) = \varepsilon_1(b_{121}(b, 0, 0)) = b \end{cases} \quad (2.20)$$

ou encore :

$$\begin{cases} a = a' \\ b = c' \\ c = b' - c' \end{cases} \quad (2.21)$$

**Exemple 2.4.6.** Les paramètres en cordes des éléments de  $\mathcal{B}(\varpi_1 + \varpi_2)$  sont :

$$\begin{aligned} 1 &= c_{121}^{-1}(0, 0, 0) \\ F_1 &= c_{121}^{-1}(1, 0, 0) \\ F_2 F_1 &= c_{121}^{-1}(0, 1, 1) \\ F_2^2 F_1 &= c_{121}^{-1}(0, 2, 1) \\ F_1 F_2^2 F_1 &= c_{121}^{-1}(1, 2, 1) \\ F_2 &= c_{121}^{-1}(0, 1, 0) \\ F_1 F_2 &= c_{121}^{-1}(1, 1, 0) \\ F_1^2 F_2 &= c_{121}^{-1}(2, 1, 0) \end{aligned}$$

On peut également calculer des formules explicites pour les changements  $(a'', b'', c'') = c_{212}(c_{121}^{-1}(a', b', c')) = c_{212}(b_{121}(a, b, c))$ , en utilisant les formules (2.19) (et son inverse), (2.20) et (2.21).

$$\left\{ \begin{array}{l} a'' = \varepsilon_2(c_{121}^{-1}(a', b', c')) = \varepsilon_2(b_{121}(a, b, c)) \\ \quad = \varepsilon_2(b_{212}(b + c - \min(a, c), \min(a, c), a + b - \min(a, c))) \\ \quad = b + c - \min(a, c) \\ \quad = b' - \min(a', b' - c') = b' + c' - \min(a' + c', b') \\ \\ b'' = \varepsilon_1(b_{212}(0, \min(a, c), a + b - \min(a, c))) \\ \quad = \varepsilon_1(b_{121}(a + b, 0, \min(a, c))) \\ \quad = a + b \\ \quad = a' + c' \\ \\ c'' = \varepsilon_2(b_{121}(0, 0, \min(a, c))) \\ \quad = \varepsilon_2(b_{212}(\min(a, c), 0, 0)) \\ \quad = \min(a, c) \\ \quad = \min(a', b' - c') = \min(a' + c', b') - c' \end{array} \right. \quad (2.22)$$

## 2.5 Base canonique duale de l'algèbre $\bigoplus V(\lambda)^*$

On considère l'espace  $\bigoplus_{\lambda \in P^+} V(\lambda)^*$ . Cet espace est naturellement muni d'une structure de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ -module, mais aussi d'une structure de  $\mathbb{C}$ -algèbre compatible avec la base canonique (duale). C'est ce que nous allons préciser dans la suite.

**Produit sur  $\bigoplus_{\lambda \in P^+} V(\lambda)^*$  :**

Soit  $\lambda$  et  $\mu$  deux poids dominants. Il suffit de définir le produit de deux éléments homogènes  $\xi$  et  $\xi'$  avec  $\xi \in V(\lambda)^*$ ,  $\xi' \in V(\mu)^*$ .

On rappelle que la structure de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ -module sur  $V(\lambda) \otimes V(\mu)$  est donnée par le coproduit  $\Delta$  sur  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ . Autrement dit, pour tout  $g \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ , si on écrit  $\Delta(g) = g_{(1)} \otimes g_{(2)}$  (notations de Sweedler), on a :

$$g \cdot v \otimes w = \Delta(g)v \otimes w = g_{(1)}v \otimes g_{(2)}w$$

On considère maintenant le morphisme de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ -modules suivant :

$$\begin{aligned} p : V(\lambda + \mu) &\longrightarrow V(\lambda) \otimes V(\mu) \\ v_{\lambda + \mu} &\longmapsto v_{\lambda} \otimes v_{\mu} \end{aligned}$$

On pose  $\xi\xi' = p^*(\xi \otimes \xi')$ , où  $p^*$  est le morphisme adjoint :

$$p^* : V(\lambda)^* \otimes V(\mu)^* \longrightarrow V(\lambda + \mu)^*$$

**Base canonique de  $\bigoplus_{\lambda \in P^+} V(\lambda)^*$  :**

On considère  $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)^*$  le dual fini de  $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$  et on note  $\mathcal{B}^* \subset \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)^*$  la base duale de  $\mathcal{B}$ . Pour tout  $b \in \mathcal{B}$ , on désigne par  $b^*$  l'élément de  $\mathcal{B}^*$  vérifiant  $\langle b^*, b' \rangle = \delta_{b,b'}$  pour tout  $b' \in \mathcal{B}$ .

On fixe un poids dominant  $\lambda$ .

On considère la projection canonique :

$$\begin{aligned} \pi_{\lambda} : \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-) &\twoheadrightarrow V(\lambda) \\ u &\mapsto uv_{\lambda} \end{aligned}$$

Le morphisme adjoint donne une injection :

$$\pi_{\lambda}^* : V(\lambda)^* \hookrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)^*$$

Si  $b \in \mathcal{B}(\lambda)$ , on désigne par  $\xi_{\lambda}(b^*)$  l'élément de  $V(\lambda)^*$  dual de  $bv_{\lambda}$ , *i.e.*  $\langle \xi_{\lambda}(b^*), b'v_{\lambda} \rangle = \delta_{b,b'}$  pour tout  $b' \in \mathcal{B}$ .

On vérifie aisément que :

$$\forall b \in \mathcal{B}(\lambda), \pi_{\lambda}^*(\xi_{\lambda}(b^*)) = b^*$$

En effet, pour tout  $b' \in \mathcal{B}$  :

$$\begin{aligned} \langle \pi_{\lambda}^*(\xi_{\lambda}(b^*)), b' \rangle &= \langle \xi_{\lambda}(b^*), \pi_{\lambda}(b') \rangle \\ &= \langle \xi_{\lambda}(b^*), b'v_{\lambda} \rangle \\ &= \delta_{b,b'} \\ &= \langle b^*, b' \rangle \end{aligned}$$

En posant  $\xi_\lambda(b^*) = 0$  si  $b \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}(\lambda)$ , et en prolongeant par linéarité  $\xi_\lambda : \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)^* \rightarrow V(\lambda)^*$ , on obtient un inverse à droite pour  $\pi_\lambda^*$ .

L'ensemble  $\{\xi_\lambda(b^*), b \in \mathcal{B}(\lambda), \lambda \in P^+\}$  est une base de  $\bigoplus_{\lambda \in P^+} V(\lambda)^*$  appelée *base canonique*.

### Produit sur les éléments de base :

Le produit de  $\bigoplus_{\lambda \in P^+} V(\lambda)^*$  est compatible avec les bases canoniques (duales). Plus précisément, pour tout  $b, b', b'' \in \mathcal{B}$  on définit les coefficients  $d_{b,b'}^{b''}$  par la décomposition du produit  $b^*b'^*$  dans la base  $\mathcal{B}^*$  :

$$b^*b'^* = \sum_{b'' \in \mathcal{B}} d_{b,b'}^{b''} b''^*$$

Rappelons que le produit sur  $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)^*$  est donné par le coproduit de  $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$ , autrement dit, les coefficients  $d_{b,b'}^{b''}$  satisfont également :

$$\Delta(b'') = \sum_{b,b' \in \mathcal{B}} d_{b,b'}^{b''} b \otimes b'$$

Avec ces notations, on a :

**Proposition 2.5.1.** *Pour tout  $b \in \mathcal{B}(\lambda), b' \in \mathcal{B}(\mu)$  :*

$$\xi_\lambda(b^*)\xi_\mu(b'^*) = \xi_{\lambda+\mu}(b^*b'^*)$$

**Preuve** — Fixons  $b, b' \in \mathcal{B}$ . Pour montrer l'égalité ci-dessus, il suffit d'évaluer chacun des membres sur un élément  $b''v_{\lambda+\mu}$  de la base de  $V(\lambda + \mu)$ .

D'une part,

$$\begin{aligned} \langle \xi_\lambda(b^*)\xi_\mu(b'^*), b''v_{\lambda+\mu} \rangle &= \langle p^*(\xi_\lambda(b^*) \otimes \xi_\mu(b'^*)), b''v_{\lambda+\mu} \rangle \\ &= \langle \xi_\lambda(b^*) \otimes \xi_\mu(b'^*), p(b''v_{\lambda+\mu}) \rangle \\ &= \langle \xi_\lambda(b^*) \otimes \xi_\mu(b'^*), b''p(v_{\lambda+\mu}) \rangle \\ &= \langle \xi_\lambda(b^*) \otimes \xi_\mu(b'^*), \Delta(b'')(v_\lambda \otimes v_\mu) \rangle \\ &= \langle \xi_\lambda(b^*) \otimes \xi_\mu(b'^*), \left( \sum_{b_1, b_2 \in \mathcal{B}} d_{b_1, b_2}^{b''} b_1 \otimes b_2 \right) (v_\lambda \otimes v_\mu) \rangle \\ &= \langle \xi_\lambda(b^*) \otimes \xi_\mu(b'^*), \sum_{b_1, b_2 \in \mathcal{B}} d_{b_1, b_2}^{b''} b_1 v_\lambda \otimes b_2 v_\mu \rangle \\ &= \sum_{b_1, b_2 \in \mathcal{B}} d_{b_1, b_2}^{b''} \langle \xi_\lambda(b^*), b_1 v_\lambda \rangle \langle \xi_\mu(b'^*), b_2 v_\mu \rangle \\ &= d_{b,b'}^{b''} \end{aligned}$$

D'autre part, on a aussi :

$$\langle \xi_{\lambda+\mu}(b^*b'^*), b''v_{\lambda+\mu} \rangle = \left\langle \sum_{b_3 \in \mathcal{B}} d_{b,b'}^{b_3} \xi_{\lambda+\mu}(b_3^*), b''v_{\lambda+\mu} \right\rangle = d_{b,b'}^{b''}$$

□



## Chapitre 3

# Relevés géométriques et involution de Schützenberger

Les paramétrisations de la base canonique sont étroitement liées avec les paramétrisations de sous-variétés positives. Ce lien a été remarqué par Lusztig et explicitement formulé par Berenstein et Zelevinsky, via une transformation de *tropicalisation*. Le relèvement géométrique consiste à calculer des formules sur la base canonique en considérant leurs analogues dans les sous-variétés positives dans lesquelles les calculs sont plus simples à effectuer. On applique cette méthode au calcul de l'involution de Schützenberger généralisée.

Au premier sous-chapitre, nous définissons l'application de tropicalisation d'après [2]. Le deuxième sous-chapitre introduit les sous-variétés positives et leurs paramétrisations, d'après [5]. Le troisième concerne l'involution de Schützenberger et sa généralisation. Enfin, nous donnons un analogue géométrique de l'involution de Schützenberger et en déduisons des formules explicites en termes de paramétrisations de la base canonique.

### 3.1 Tropicalisation

**Définition 3.1.1.** Un *semi-corps* est un ensemble  $\mathcal{E}$  muni de deux lois internes, une addition et une multiplication, telles que :

- (1) l'addition est commutative et associative
- (2) la multiplication fait de  $\mathcal{E}$  un groupe commutatif
- (3) la multiplication est distributive sur l'addition :  $a(b+c) = ab+ac$ , pour tout  $a, b, c \in \mathcal{E}$

Les principaux semi-corps que nous considérerons sont les suivants :

**Exemple 3.1.2.** L'ensemble des entiers  $\mathbb{Z}$  est muni d'une structure de semi-corps, dite semi-corps tropical, avec les opérations suivantes :

$$a \oplus b := \min(a, b), \quad a \odot b := a + b, \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}$$

On remarque que la propriété d'associativité provient de l'identité :

$$\min(a, \min(b, c)) = \min(\min(a, b), c) = \min(a, b, c) \quad (3.1)$$

Et la propriété de distributivité provient de l'identité :

$$a + \min(b, c) = \min(a + b, a + c) \quad (3.2)$$

En appliquant deux fois cette propriété et en utilisant la commutativité on a également :

$$\min(a, b) + \min(c, d) = \min(a + c, a + d, b + c, b + d) \quad (3.3)$$

**Exemple 3.1.3.** La structure tropicale de  $\mathbb{Z}$  induit également une structure de semi-corps sur  $\mathcal{F}(\mathbb{Z}^N, \mathbb{Z})$  l'ensemble des applications de  $\mathbb{Z}^N$  dans  $\mathbb{Z}$  par :

$$\begin{aligned} f \odot g &: (t_1, \dots, t_N) \mapsto f(t_1, \dots, t_N) + g(t_1, \dots, t_N), \\ f \oplus g &: (t_1, \dots, t_N) \mapsto \min(f(t_1, \dots, t_N), g(t_1, \dots, t_N)) \end{aligned}$$

pour tout  $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}^N, \mathbb{Z})$ .

On pourra également noter  $f + g$  pour  $f \odot g$  et  $\min(f, g)$  pour  $f \oplus g$ .

On introduit les projections  $p_i \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}^N, \mathbb{Z})$ ,  $1 \leq i \leq N$ , définies par  $p_i(t_1, \dots, t_N) = t_i$ .

**Exemple 3.1.4.** Les ensembles  $\mathbb{R}_{>0}$  et  $\mathbb{Q}_{>0}$  munis de leur addition et multiplication usuelle, sont des semi-corps.

**Exemple 3.1.5.** Enfin, un exemple capital pour la suite est celui de l'ensemble  $\mathbb{Q}_{>0}(t_1, \dots, t_N)$  appelé ensemble des *expressions rationnelles sans signe moins* en les indéterminées  $t_1, \dots, t_N$ . Un élément  $f$  de  $\mathbb{Q}(t_1, \dots, t_N)$  est dans  $\mathbb{Q}_{>0}(t_1, \dots, t_N)$ , s'il peut s'écrire sous la forme :

$$f = \frac{P}{Q}, \text{ avec } P, Q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[t_1, \dots, t_N] \setminus \{0\} \quad (3.4)$$

C'est un semi-corps (en fait, le plus petit contenant les indéterminées  $t_1, \dots, t_N$ ) pour les lois usuelles  $+$  et  $\times$ .

Si  $f(t_1, \dots, t_N)$  est une expression rationnelle sans soustraction, on définit l'expression tropicalisée  $[f]_{\text{Tr}}(t_1, \dots, t_N)$  comme l'expression obtenue à partir de  $f(t_1, \dots, t_N)$  en remplaçant les  $+$  par des  $\min$ , les  $\times$  par des  $+$ , et les  $\div$  par des  $-$  (voir l'exemple 3.1.8 ci-dessous tiré de [2]). Plus précisément ce procédé s'exprime en termes d'homomorphisme de semi-corps :

**Théoreme 3.1.6.** [2] *Il existe un unique homomorphisme de semi-corps,  $\varphi : \mathbb{Q}_{>0}(t_1, \dots, t_N) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{Z}^N, \mathbb{Z})$ , tel que :*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Q}_{>0}(t_1, \dots, t_N) &\rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{Z}^N, \mathbb{Z}), \\ t_i &\mapsto p_i, \quad \forall 1 \leq i \leq N, \end{aligned}$$

**Preuve** — Montrons que la connaissance des  $\varphi(t_i)$ ,  $1 \leq i \leq N$  détermine uniquement l'homomorphisme  $\varphi$ .

Tout d'abord un homomorphisme de semi-corps est en particulier un homomorphisme de groupes multiplicatifs, donc  $\varphi(1) = 0$ . Et par induction  $\varphi(n) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . On introduit la notation  $\underline{k}$  pour des multi-indices, i.e.  $\underline{k} = (k_1, k_2, \dots, k_N)$ ,  $k_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  et la notation  $t^{\underline{k}}$  pour le monôme  $t_1^{k_1} \dots t_N^{k_N}$ .

Si  $P$  est un polynôme non nul de  $\mathbb{Z}_{\geq 0}[t_1, \dots, t_N]$ , on peut écrire :

$$P = \sum_{\underline{k} \in K} a_{\underline{k}} t^{\underline{k}}, \quad a_{\underline{k}} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad K \text{ partie finie de } \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$$

alors  $\varphi(P)$  est parfaitement déterminée :

$$\varphi(P) = \min(\sum_{i=1}^N k_i p_i, (k_1, \dots, k_N) \in K)$$

Si  $S$  est un autre polynôme non nul de  $\mathbb{Z}_{\geq 0}[t_1, \dots, t_N]$ , que l'on écrit :

$$S = \sum_{\underline{l} \in L} b_{\underline{l}} t^{\underline{l}}, \quad b_{\underline{l}} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad L \text{ partie finie de } \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$$

alors en vertu de (3.1) on a bien :

$$\begin{aligned} \varphi(P + S) &= \min(\sum_{i=1}^N k_i p_i, \sum_{i=1}^N l_i p_i, \underline{k} \in K, \underline{l} \in L) \\ &= \min(\min(\sum_{i=1}^N k_i p_i, \underline{k} \in K), \min(\sum_{i=1}^N l_i p_i, \underline{l} \in L)) \\ &= \min(\varphi(P), \varphi(S)) \end{aligned}$$

et en vertu de (3.3) on a bien :

$$\begin{aligned} \varphi(PS) &= \min(\sum_{i=1}^N (k_i + l_i) p_i, \underline{k} \times \underline{l} \in K \times L) \\ &= \min(\sum_{i=1}^N k_i p_i, \underline{k} \in K) + \min(\sum_{i=1}^N l_i p_i, \underline{l} \in L) \\ &= \varphi(P) + \varphi(S) \end{aligned} \tag{3.5}$$

Si  $f \in \mathbb{Q}_{>0}(t_1, \dots, t_N)$ , on peut écrire :

$$f = \frac{P}{Q}, \quad \text{avec } P, Q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[t_1, \dots, t_N] \setminus \{0\}$$

Et alors  $\varphi(f)$  est parfaitement déterminée :

$$\varphi(f) = \varphi\left(\frac{P}{Q}\right) = \varphi(P) - \varphi(Q)$$

En effet, ceci ne dépend pas des représentants choisis, si  $\frac{P}{Q} = \frac{R}{S}$  alors on a  $PS = RQ$  dans  $\mathbb{Z}_{\geq 0}[t_1, \dots, t_N]$  et par (3.5) on a alors :

$$\varphi(P) + \varphi(S) = \varphi(R) + \varphi(Q)$$

Dans le semi-corps  $\mathcal{F}(\mathbb{Z}^N, \mathbb{Z})$  on peut soustraire car l'addition est une loi de groupe. D'où,

$$\varphi(P) - \varphi(Q) = \varphi(R) - \varphi(S)$$

□

**Définition 3.1.7.** L'unique morphisme  $\varphi$  déterminé par le Théorème 3.1.6, est appelé *tropicalisation* et est noté  $[\cdot]_{\text{Tr}}$ .

**Exemple 3.1.8.** Considérons l'expression  $f(t_1, t_2) := t_1^2 - t_1 t_2 + t_2^2$ . On remarque que  $f$  est une expression rationnelle sans signe moins, car :

$$f(t_1, t_2) = \frac{t_1^3 + t_2^3}{t_1 + t_2}$$

alors,

$$[f]_{\text{Tr}}(t_1, t_2) = \min(3t_1, 3t_2) - \min(t_1, t_2) = \min(2t_1, 2t_2)$$

L'élément  $f$  est appelé relevé géométrique de l'expression  $[f]_{\text{Tr}}$ . Un relevé géométrique n'est pas défini de manière unique, comme on peut le constater dans l'exemple ci-dessus. En effet,  $\frac{t_1^3+t_2^3}{t_1+t_2}$  et  $t_1^2+t_2^2$  sont tous les deux des relevés géométriques de  $\min(2t_1, 2t_2)$ .

Si  $f_1, f_2, \dots, f_n \in \mathbb{Q}_{>0}(t_1, \dots, t_N)$ , par abus de notations, on note également  $[(f_1, f_2, \dots, f_n)]_{\text{Tr}} := ([f_1]_{\text{Tr}}, [f_2]_{\text{Tr}}, \dots, [f_n]_{\text{Tr}})$ , que l'on voit comme un élément de  $\mathcal{F}(\mathbb{Z}^N, \mathbb{Z}^N)$ .

**Proposition 3.1.9.** Ici  $t$  désigne un élément de  $\mathbb{Z}^N$ .

(i) Si  $(f_1, f_2, \dots, f_N) \in \mathbb{Q}_{>0}(t_1, \dots, t_N)^N$  et  $g \in \mathbb{Q}_{>0}(t_1, \dots, t_N)$  alors  $g(f_1, f_2, \dots, f_N)$  est dans  $\mathbb{Q}_{>0}(t_1, \dots, t_N)$  et

$$[g(f_1, f_2, \dots, f_N)]_{\text{Tr}}(t) = [g]_{\text{Tr}}([f_1]_{\text{Tr}}(t), \dots, [f_N]_{\text{Tr}}(t))$$

(ii) Si on a  $F, G \in \mathbb{Q}_{>0}(t_1, \dots, t_N)^N$  alors

$$[G \circ F]_{\text{Tr}}(t) = ([G]_{\text{Tr}} \circ [F]_{\text{Tr}})(t)$$

(iii) En particulier, si  $F \in \mathbb{Q}_{>0}(t_1, \dots, t_N)^N$  est inversible pour la loi de composition,  $[F]_{\text{Tr}}$  l'est aussi et :

$$[F^{-1}]_{\text{Tr}} = [F]_{\text{Tr}}^{-1}$$

**Preuve** — Pour (i), on procède par étapes sur  $g$  :

– Si  $g = a \in \mathbb{Q}_{>0}$  :  
alors,  $[g]_{\text{Tr}}(t) = 0$  et  $g(f_1, f_2, \dots, f_N) = g$ , d'où

$$[g(f_1, f_2, \dots, f_N)]_{\text{Tr}}(t) = [g]_{\text{Tr}}([f_1]_{\text{Tr}}(t), \dots, [f_N]_{\text{Tr}}(t)) = 0$$

– Si  $g = t_1^{k_1} t_2^{k_2} \dots t_N^{k_N}$  est un monôme :  
alors, d'une part :  $g(f_1, f_2, \dots, f_N) = f_1^{k_1} f_2^{k_2} \dots f_N^{k_N}$  et donc

$$[g(f_1, f_2, \dots, f_N)]_{\text{Tr}}(t) = k_1 [f_1]_{\text{Tr}}(t) + \dots + k_N [f_N]_{\text{Tr}}(t)$$

car  $[\cdot]_{\text{Tr}}$  est un morphisme.

D'autre part,  $[g]_{\text{Tr}}(t) = k_1 t_1 + \dots + k_N t_N$ , et donc

$$[g]_{\text{Tr}}([f_1]_{\text{Tr}}(t), \dots, [f_N]_{\text{Tr}}(t)) = k_1 [f_1]_{\text{Tr}}(t) + \dots + k_N [f_N]_{\text{Tr}}(t)$$

- Si  $g$  est un polynôme de  $\mathbb{Z}_{>0}[t_1, \dots, t_N]$  : on procède par récurrence sur le nombre de monômes dans  $g$ .

On écrit  $g = P + Q$ . Alors, d'une part :

$$g(f_1, f_2, \dots, f_N) = P(f_1, f_2, \dots, f_N) + Q(f_1, f_2, \dots, f_N) \text{ d'où :}$$

$$\begin{aligned} [g(f_1, f_2, \dots, f_N)]_{\text{Tr}}(t) &= \min([P(f_1, f_2, \dots, f_N)]_{\text{Tr}}(t), [Q(f_1, f_2, \dots, f_N)]_{\text{Tr}}(t)) = \\ &= \min([P]_{\text{Tr}}([f_1]_{\text{Tr}}(t), \dots, [f_N]_{\text{Tr}}(t)), [Q]_{\text{Tr}}([f_1]_{\text{Tr}}(t), \dots, [f_N]_{\text{Tr}}(t))) \end{aligned}$$

car  $[\cdot]_{\text{Tr}}$  est un morphisme et par hypothèse de récurrence.

D'autre part,  $[g]_{\text{Tr}}(t) = \min([P]_{\text{Tr}}(t), [Q]_{\text{Tr}}(t))$ , d'où :

$$\begin{aligned} [g]_{\text{Tr}}([f_1]_{\text{Tr}}(t), \dots, [f_N]_{\text{Tr}}(t)) &= \\ \min([P]_{\text{Tr}}([f_1]_{\text{Tr}}(t), \dots, [f_N]_{\text{Tr}}(t)), [Q]_{\text{Tr}}([f_1]_{\text{Tr}}(t), \dots, [f_N]_{\text{Tr}}(t))) & \end{aligned}$$

- Si  $g = P/Q$  où  $P$  et  $Q$  sont des polynômes : alors, d'une part :  $g(f_1, f_2, \dots, f_N) = P(f_1, f_2, \dots, f_N)/Q(f_1, f_2, \dots, f_N)$  donc,

$$\begin{aligned} [g(f_1, f_2, \dots, f_N)]_{\text{Tr}}(t) &= [P(f_1, f_2, \dots, f_N)]_{\text{Tr}}(t) - [Q(f_1, f_2, \dots, f_N)]_{\text{Tr}}(t) = \\ &= [P]_{\text{Tr}}([f_1]_{\text{Tr}}(t), \dots, [f_N]_{\text{Tr}}(t)) - [Q]_{\text{Tr}}([f_1]_{\text{Tr}}(t), \dots, [f_N]_{\text{Tr}}(t)) \end{aligned}$$

Et d'autre part,  $[g]_{\text{Tr}}(t) = [P]_{\text{Tr}}(t) - [Q]_{\text{Tr}}(t)$ , d'où :

$$\begin{aligned} [g]_{\text{Tr}}([f_1]_{\text{Tr}}(t), \dots, [f_N]_{\text{Tr}}(t)) &= \\ [P]_{\text{Tr}}([f_1]_{\text{Tr}}(t), \dots, [f_N]_{\text{Tr}}(t)) - [Q]_{\text{Tr}}([f_1]_{\text{Tr}}(t), \dots, [f_N]_{\text{Tr}}(t)) & \end{aligned}$$

Ce qui démontre le point (i). Les points (ii) et (iii) en sont des conséquences directes.  $\square$

## 3.2 Relèvement géométrique de la base canonique

### 3.2.1 Notations

Pour tout  $1 \leq i \leq n$ , on note  $\varphi_i : SL_2 \hookrightarrow G$  l'injection canonique correspondant à la racine simple  $\alpha_i$ . Pour  $1 \leq i \leq n$ , on considère les sous-groupes à un paramètre de  $G$  définis par

$$x_i(t) = \varphi_i \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y_i(t) = \varphi_i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{C}$$

$$t^{\alpha_i^\vee} = \varphi_i \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{C}^*$$

Les  $x_i(t)$ , (resp.  $y_i(t)$ ,  $t^{\alpha_i^\vee}$ ) engendrent  $U$ , (resp.  $U^-, T$ ). On a les relations de commutation suivantes :

$$t^{\alpha_i^\vee} x_j(t') = x_j(t^{a_{ij}} t') t^{\alpha_i^\vee}, \quad t^{\alpha_i^\vee} y_j(t') = y_j(t^{-a_{ij}} t') t^{\alpha_i^\vee} \quad (3.6)$$

On définit deux antiautomorphismes involutifs de  $G$ ,  $x \mapsto x^T$ , appelé transposition, et  $x \mapsto x^t$ , appelé inversion, par :

$$\begin{aligned} x_i(t)^T &= y_i(t), & y_i(t)^T &= x_i(t), & (t^{\alpha_i^\vee})^T &= t^{\alpha_i^\vee} \\ x_i(t)^t &= x_i(t), & y_i(t)^t &= y_i(t), & (t^{\alpha_i^\vee})^t &= t^{-\alpha_i^\vee} \end{aligned}$$

Notons  $G_0 := U^- T U$  l'ensemble des éléments de  $G$  qui admettent une décomposition (unique) gaussienne ; on écrira  $x = [x]_- [x]_0 [x]_+$  pour  $x \in G_0$ .

Pour toute suite d'indices  $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_m)$  et tout  $m$ -uplet  $t = (t_1, \dots, t_m)$  de  $\mathbb{C}_{\neq 0}^m$ , on note :

$$\begin{aligned} x_{\mathbf{i}}(t) &:= x_{i_1}(t_1) \cdots x_{i_m}(t_m), \\ x_{-\mathbf{i}}(t) &:= y_{i_1}(t_1) t_1^{-\alpha_{i_1}^\vee} \cdots y_{i_m}(t_m) t_m^{-\alpha_{i_m}^\vee}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

On choisit  $\overline{w_0} \in \text{Norm}(T)$  un représentant de  $w_0$ , en posant  $\overline{w_0} := \overline{s_{i_1}} \overline{s_{i_2}} \cdots \overline{s_{i_N}}$ , où  $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_N)$  est un mot réduit de  $w_0$  et

$$\overline{s_i} := \varphi_i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = x_i(-1) y_i(1) x_i(-1), \quad 1 \leq i \leq n$$

Il est connu que  $\overline{w_0}$  ne dépend pas du mot réduit choisi. Un calcul facile donne  $\overline{s_i}^T = \overline{s_i}^{-1}$  et  $\overline{s_i}^t = \overline{s_i}$ , ainsi on a aussi,

$$\overline{w_0}^T = \overline{w_0}^{-1}, \quad \overline{w_0}^t = \overline{w_0} \quad (3.8)$$

L'élément  $\overline{w_0}$  n'est pas nécessairement involutif dans  $G$ , on a seulement  $\overline{w_0}^2 \in T$ .

### 3.2.2 Sous-variétés totalement positives de $G$

On désigne par  $G_{>0}$  le sous monoïde multiplicatif de  $G$  engendré par  $x_i(t)$ ,  $y_i(t)$ ,  $t^{\alpha_i^\vee}$ , pour  $t > 0$ .

Suivant [5] on introduit les doubles cellules de Bruhat réduites particulières suivantes :

$$L^{e, w_0} := U \cap B^- \overline{w_0} B^- \quad \text{et} \quad L^{w_0, e} := U \overline{w_0} U \cap B^- \quad (3.9)$$

On considère leur partie positive :

$$L_{>0}^{e, w_0} := L^{e, w_0} \cap G_{>0}, \quad \text{et} \quad L_{>0}^{w_0, e} := L^{w_0, e} \cap G_{>0}$$

Les applications  $x_{\mathbf{i}}$  et  $x_{-\mathbf{i}}$  définies en (3.7), paramétrisent ces sous variétés de  $G$ , lorsque  $\mathbf{i}$  est un mot réduit de  $w_0$  :

**Théoreme 3.2.1.** [5] Pour tout  $\mathbf{i}$  mot réduit de  $w_0$ , l'application  $x_{\mathbf{i}}$ , resp.  $x_{-\mathbf{i}}$ , est un isomorphisme birégulier entre  $\mathbb{C}_{\neq 0}^N$  et un ouvert dense de  $L^{e, w_0}$ , resp.  $L^{w_0, e}$ , et se restreint en une bijection de  $\mathbb{R}_{>0}^N$  sur  $L_{>0}^{e, w_0}$ , resp.  $L_{>0}^{w_0, e}$ .

### 3.2.3 Relevé géométrique des applications $R_{\pm \mathbf{i}}^{\pm i'}$

On note  $\tilde{R}_{\mathbf{i}}^{i'} := x_{\mathbf{i}'}^{-1} \circ x_{\mathbf{i}}$  et  $\tilde{R}_{-\mathbf{i}}^{-i'} := x_{-\mathbf{i}'}^{-1} \circ x_{-\mathbf{i}}$  les applications de changement de paramétrisation. Un résultat important de [5] donne que ces applications relèvent géométriquement les applications  $R_{\mathbf{i}}^{i'}$  et  $R_{-\mathbf{i}}^{-i'}$  de changement de paramétrisation de la base canonique. Plus précisément,

**Théoreme 3.2.2.** [5] *Les composantes de  $(\tilde{R}_{\mathbf{i}}^{i'})^\vee$  et  $(\tilde{R}_{-\mathbf{i}}^{-i'})^\vee$  sont des expressions rationnelles sans soustraction, et*

$$(i) \quad [(\tilde{R}_{\mathbf{i}}^{i'})^\vee]_{\text{Tr}}(t) = R_{\mathbf{i}}^{i'}(t), \quad (ii) \quad [(\tilde{R}_{-\mathbf{i}}^{-i'})^\vee]_{\text{Tr}}(t) = R_{-\mathbf{i}}^{-i'}(t)$$

La notation  $(.)^\vee$  signifie que l'on considère les formules analogues dans le dual de Langlands de  $G$  (voir §1.6).

**Exemple 3.2.3.** Formules pour  $R_{121}^{212}$  dans le cas  $A_2$  :

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$x_{121}(t_1, t_2, t_3) = x_1(t_1)x_2(t_2)x_1(t_3) = \begin{pmatrix} 1 & t_1 + t_3 & t_1 t_2 \\ 0 & 1 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$x_{212}(t'_1, t'_2, t'_3) = x_2(t'_1)x_1(t'_2)x_2(t'_3) = \begin{pmatrix} 1 & t'_2 & t'_2 t'_3 \\ 0 & 1 & t'_1 + t'_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où, en identifiant  $x_1(t_1)x_2(t_2)x_1(t_3) = x_2(t'_1)x_1(t'_2)x_2(t'_3)$  on obtient :

$$(t'_1, t'_2, t'_3) = \left( \frac{t_2 t_3}{t_1 + t_3}, t_1 + t_3, \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_3} \right) = \tilde{R}_{121}^{212}(t_1, t_2, t_3)$$

On en déduit :

$$[(t'_1, t'_2, t'_3)]_{\text{Tr}} = (t_2 + t_3 - \min(t_1, t_3), \min(t_1, t_3), t_1 + t_3 - \min(t_1, t_3))$$

Ce qui correspond bien aux formules (2.19) du changement de paramétrisation  $R_{121}^{212}$  calculées au chapitre précédent. Rappelons qu'un groupe en type  $A$  est son propre dual de Langlands.

**Exemple 3.2.4.** Formules pour  $R_{-121}^{-212}$  dans le cas  $A_2$  :

$$y_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \end{pmatrix},$$

$$t^{-\alpha_1^\vee} = \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t^{-\alpha_2^\vee} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} x_{-121}(t_1, t_2, t_3) &= y_1(t_1)t_1^{-\alpha_1^\vee} y_2(t_2)t_2^{-\alpha_2^\vee} y_1(t_3)t_3^{-\alpha_1^\vee} \\ &= \begin{pmatrix} t_1^{-1}t_3^{-1} & 0 & 0 \\ t_3^{-1} + t_1t_2^{-1} & \frac{t_1t_3}{t_2} & 0 \\ 1 & t_3 & t_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$x_{-212}(t'_1, t'_2, t'_3) = \begin{pmatrix} t_2'^{-1} & 0 & 0 \\ t_1'^{-1} & \frac{t_2'}{t_1't_3'} & 0 \\ 1 & \frac{t_2'}{t_3'} + t_1' & t_1't_3' \end{pmatrix}$$

En identifiant,  $x_{-121}(t_1, t_2, t_3) = x_{-212}(t'_1, t'_2, t'_3)$  on trouve :

$$(t'_1, t'_2, t'_3) = \left( \frac{t_2t_3}{t_2 + t_1t_3}, t_1t_3, \frac{t_2 + t_1t_3}{t_3} \right)$$

On en déduit :

$$[(t'_1, t'_2, t'_3)]_{\text{Tr}} = (t_2 + t_3 - \min(t_2, t_1 + t_3), t_1 + t_3, \min(t_2, t_1 + t_3) - t_3)$$

Ce qui correspond bien aux formules (2.22) du changement de paramétrisation  $R_{-121}^{-212}$  calculées au chapitre précédent.

On peut également donner un relevé géométrique des applications de changement de paramétrisation  $R_{-i}^{i'}$ . Pour cela on choisit  $\overline{w_0} \in \text{Norm}(T)$  un représentant de  $w_0$ . Par exemple prenons  $\overline{w_0} := \overline{s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_N}}$ , avec  $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_N)$  un mot réduit de  $w_0$  et

$$\overline{s_i} := \varphi_i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = x_i(-1)y_i(1)x_i(-1), \quad 1 \leq i \leq n$$

On peut montrer que  $\overline{w_0}$  ne dépend pas du mot réduit choisi. Un calcul facile donne  $\overline{s_i}^T = \overline{s_i}^{-1}$  et  $s_i^t = s_i$ , ainsi on a aussi,

$$\overline{w_0}^T = \overline{w_0}^{-1} = \overline{w_0}^t = \overline{w_0}^{-1} \tag{3.10}$$

Soit  $x \in G$ , on pose, quand cela a un sens :

$$\eta^{w_0, e}(x) := [(\overline{w_0}x^T)^{-1}]_+, \quad \eta^{e, w_0}(x) := ([\overline{w_0}^{-1}x^T]_0[\overline{w_0}^{-1}x^T]_-)^{-1}$$

**Théoreme 3.2.5.** [5]

- (i) L'application  $\eta^{w_0, e}$  est un isomorphisme birégulier entre  $L^{w_0, e}$  et  $L^{e, w_0}$ , qui se restreint en une bijection de  $L_{>0}^{w_0, e}$  sur  $L_{>0}^{e, w_0}$ . Son inverse est l'application  $\eta^{e, w_0}$ .

(ii) Les composantes de  $(x_{-i}^{-1} \circ \eta^{w_0, e} \circ x_{i'})^\vee$  sont des expressions rationnelles sans soustraction, et

$$R_{-i}^{i'}(t) = [(x_{-i}^{-1} \circ \eta^{w_0, e} \circ x_{i'})^\vee]_{\text{Tr}}(t)$$

**Exemple 3.2.6.** Calculons  $R_{-121}^{121}$  dans le cas  $\mathbf{A}_2$  :

$$\overline{w_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_{-121}(t_1, t_2, t_3) = \begin{pmatrix} t_1^{-1}t_3^{-1} & 0 & 0 \\ t_3^{-1} + t_1t_2^{-1} & t_1t_2^{-1}t_3 & 0 \\ 1 & t_3 & t_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (\overline{w_0}x_{-121}(t_1, t_2, t_3)^T)^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & (t_2 + t_1t_3)t_3^{-1} & t_1t_3 \\ -t_1^{-1} & -t_2t_1^{-1}t_3^{-1} & 0 \\ t_2^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= y_1(-t_2t_1^{-1}s^{-1})y_2(-st_2^{-1}t_3^{-1})y_1(-t_3s^{-1})x_1(t_1)x_2(t_3)x_1(t_2t_3^{-1}) \end{aligned}$$

où  $s = t_2 + t_1t_3$ .

$$\begin{aligned} \eta^{w_0, e}(x_{-121}(t_1, t_2, t_3)) &= [(\overline{w_0}x_{-121}(t_1, t_2, t_3)^T)^{-1}]_+ \\ &= x_1(t_1)x_2(t_3)x_1(t_2t_3^{-1}) \end{aligned}$$

En identifiant  $x_{121}(t'_1, t'_2, t'_3) = \eta^{w_0, e}(x_{-121}(t_1, t_2, t_3))$  on obtient :

$$(t'_1, t'_2, t'_3) = (t_1, t_3, t_2t_3^{-1})$$

Par tropicalisation :

$$[(t'_1, t'_2, t'_3)]_{\text{Tr}} = (t_1, t_3, t_2 - t_3)$$

C'est précisément la formule (2.21) pour  $R_{-121}^{121}$  calculée au chapitre précédent.

**Remarque 3.2.7.** Une conséquence importante du fait que les formules des applications  $R_{\pm i}^{\pm i'}$  s'obtiennent comme tropicalisées d'expressions rationnelles sans soustraction, est que les applications  $R_{\pm i}^{\pm i'}$  sont linéaires par morceaux.

Autrement dit l'espace de définition de  $R_{\pm i}^{\pm i'}$  peut être découpé en cônes sur chacun desquels l'application a une expression linéaire.

En particulier on a la propriété suivante :

$$\forall m \in \mathbb{Z}_{>0}, \forall t \in \mathbb{Z}_{>0}^N, R_{\pm i}^{\pm i'}(mt) = mR_{\pm i}^{\pm i'}(t) \quad (3.11)$$

Par exemple concernant  $R_i^{i'}$ , il existe un nombre fini de cônes  $\mathcal{C}_j^{i, i'}$  de  $\mathbb{Z}_{>0}^N$  tels que :

$$\begin{cases} \mathbb{Z}_{>0}^N = \bigcup_j \mathcal{C}_j^{i, i'}, \\ R_i^{i'}|_{\mathcal{C}_j^{i, i'}} \text{ est une application linéaire} \end{cases} \quad (3.12)$$

Les formules répertoriées en annexe A.2 permettent de déterminer ces cônes pour le rang 2.

Dans le cas  $A_2$ , l'application  $R_{121}^{212}$  fait apparaître l'expression  $\min(t_1, t_3)$ . Ainsi, les régions de linéarité de  $R_{121}^{212}$ , sont les deux cônes de  $\mathbb{Z}_{>0}^3$  délimités par l'hyperplan d'équation :

$$t_1 - t_3 = 0$$

Dans le cas  $C_2$ , l'application  $R_{1212}^{2121}$  contient les expressions  $\min(t_1 + t_2, t_1 + t_4, t_3 + t_4)$  et  $\min(2t_1 + t_2, 2t_1 + t_4, t_1 + t_2 + t_3, 2t_3 + t_4)$ . Ainsi, les régions de linéarité de  $R_{1212}^{2121}$ , sont les cônes de  $\mathbb{Z}_{>0}^4$  délimités par les hyperplans d'équation :

$$\begin{aligned} t_1 - t_3 &= 0 \\ t_2 - t_4 &= 0 \\ t_1 + t_2 - t_3 - t_4 &= 0 \\ 2t_1 + t_2 - 2t_3 - t_4 &= 0 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Le cas  $G_2$  est plus pénible à écrire.

Avec les notations ci-dessus, on a :

**Proposition 3.2.8.** *Soit  $\lambda$  un poids dominant, et  $(l_1, \dots, N) =: b_i^{-1}(v_\lambda^{low})$  les paramètres de Lusztig de l'élément de plus bas poids de  $\mathcal{B}(\lambda)$ , alors :*

$$(l_1, \dots, N) \in \bigcap_j \mathcal{C}_j^{i, i'}$$

**Preuve** — Il suffit de vérifier que c'est vrai en rang 2. Rappelons que :

$$(l_1, \dots, N) = (\langle \lambda^*, \alpha_{i_k}^\vee \rangle)_{1 \leq k \leq N}$$

Ainsi dans le cas  $A_2$ , d'après les formules (3.12) :

$$\bigcap_j \mathcal{C}_j^{i, i'} = \{(t_1, t_2, t_3) / t_1 = t_3\}$$

Donc  $b_{121}^{-1}(v_\lambda^{low}) = (\lambda_2, \lambda_1, \lambda_2)$  est dans  $\bigcap_j \mathcal{C}_j^{i, i'}$ .

De même, dans le cas  $C_2$ , d'après les équations 3.13, on a :

$$\bigcap_j \mathcal{C}_j^{i, i'} = \{(t_1, t_2, t_3, t_4) / t_1 = t_3, t_2 = t_4\}$$

Donc  $b_{121}^{-1}(v_\lambda^{low}) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2)$  est dans  $\bigcap_j \mathcal{C}_j^{i, i'}$ .

Le cas  $G_2$  est toujours pénible à écrire. Les équations des cônes sont déterminés en tropicalisant les expressions  $\pi_i$  dans les formules A.1. On constate une homogénéité dans les monômes qui apparaissent dans ces expressions (la somme des exposants des  $t_i$  à indice  $i$  impair est constante, tout comme la somme des exposants des  $t_i$  à indice  $i$  pair). Par exemple, si  $(t_1, \dots, t_6) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2)$ , on aura  $\pi_1 = 5\lambda_1^3\lambda_2^2$  et donc :

$$[\pi_1]_{\text{Tr}}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2) = \min(3\lambda_1 + 2\lambda_2) = 3\lambda_1 + 2\lambda_2$$

Ainsi on peut se convaincre que la propriété est encore vraie en type  $G_2$ .  $\square$

En corollaire on obtient la propriété suivante :

**Corollaire 3.2.9.** *Soit  $i$  et  $i'$ , deux mots réduits de  $w_0$ . Soit  $\lambda$  un poids dominant, et  $l =: b_i^{-1}(v_\lambda^{low})$  les paramètres de Lusztig de l'élément de plus bas poids de  $\mathcal{B}(\lambda)$ . Alors :*

$$\forall t \in \mathbb{Z}_{>0}^N, \quad R_i^{i'}(t + l) = R_i^{i'}(t) + R_i^{i'}(l)$$

**Preuve** — Quelque soit  $t \in \mathbb{Z}_{>0}^N$ , on peut choisir un cône qui contient  $t$  et  $l$ , et donc aussi  $t + l$ . Comme la formule  $R_i^{i'}$  est linéaire sur ce cône le corollaire est immédiat.  $\square$

### 3.3 Involution de Schützenberger

#### 3.3.1 Définition sur les tableaux de Young

On se place dans le cas où  $G = SL_n$  et on fixe un poids dominant  $\lambda$ . Rappelons que  $Y(\lambda)$  désigne l'ensemble des tableaux de Young semi-standard de forme  $\lambda$  (voir §2.3.4).

L'involution de Schützenberger sur  $Y(\lambda)$  peut être décrite de plusieurs manières.

Tout d'abord Schützenberger l'a introduite, [38], comme un algorithme d'évacuation utilisant le jeu de taquin (*e.g.* [15]). Elle peut également être décrite avec la correspondance de Robinson-Schensted, ainsi qu'avec les opérateurs de Bender-Knuth.

Pour une présentation simple, nous préférons la description suivante (voir par exemple [24]). La transformation  $S(T)$  d'un tableau  $T$  se réalise en trois étapes :

- (1) Opération de renversement (REVERSE) : on retourne le tableau en faisant une rotation de  $180^\circ$ .
- (2) Passage au complémentaire (COMPLEMENT) : on remplace chaque entrée  $i$  du tableau par  $n + 1 - i$ .
- (3) Glissement (SLIDE) : on considère le coin inférieur gauche du nouveau tableau ; on pousse dans ce trou soit la case voisine de droite, soit la case voisine inférieure, en utilisant la règle du jeu de taquin (*i.e.* on pousse la case de droite si et seulement si sa valeur est strictement plus petite que celle de la case inférieure) ; on génère un nouveau trou que l'on comble en utilisant à nouveau cette règle. On recommence cette étape jusqu'à ce que le tableau soit remis en forme.

**Exemple 3.3.1.** Comme souvent un dessin vaut mieux qu'un long discours. La figure 3.3.1 est une illustration empruntée à [24] ; elle représente l'involu-

tion de Schützenberger sur un tableau de Young semi-standard dans le cas où  $G = SL_5$ .

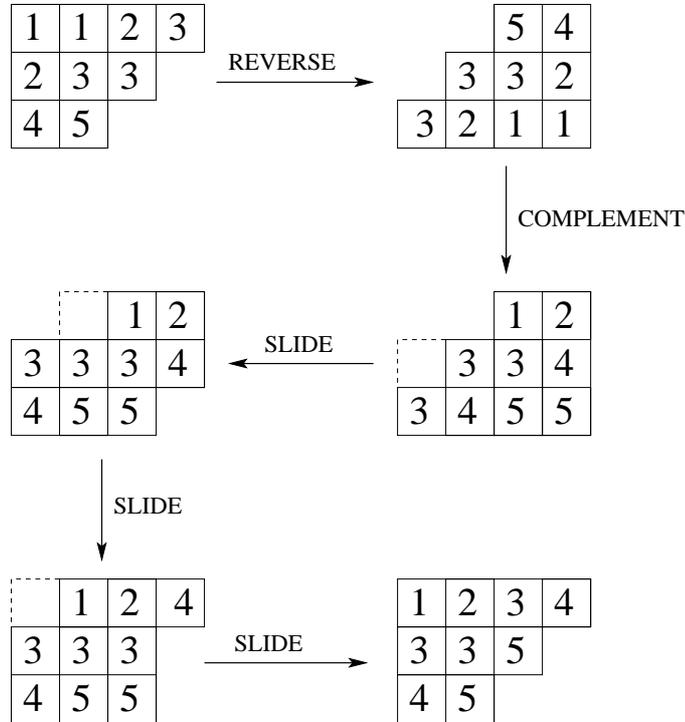


FIG. 3.1 – Involution de Schützenberger

Cette transformation stabilise l'ensemble  $Y(\lambda)$ , et de plus est involutive (comme son nom l'indique). On sait que cet ensemble  $Y(\lambda)$  est une paramétrisation particulière de la base canonique  $\mathcal{B}(\lambda)$ , d'où deux problèmes :

- (1) Donner des formules explicites pour l'involution de Schützenberger en termes des paramétrisations  $b_i$  et  $c_i$ .
- (2) Généraliser cette involution aux autres cas (*i.e.*  $G$  quelconque), et donner des formules explicites.

Dans [4], Berenstein et Zelevinsky ont traité le point (1) dans le cas particulier où  $\mathbf{i}$  est le mot réduit standard du cas  $A_n$ , et ont défini l'involution de Schützenberger généralisée, ce qui traite partiellement le point (2).

**Exemple 3.3.2.** La figure 3.2 représente l'involution de Schützenberger sur la base du  $\mathfrak{sl}_2$ -module  $V(\varpi_1 + \varpi_2)$ .

### 3.3.2 Généralisation à $V(\lambda)$

On considère les automorphismes de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  définis sur les générateurs par :

$$\phi(E_i) = F_i, \quad \phi(F_i) = E_i, \quad \phi(H_i) = -H_i$$

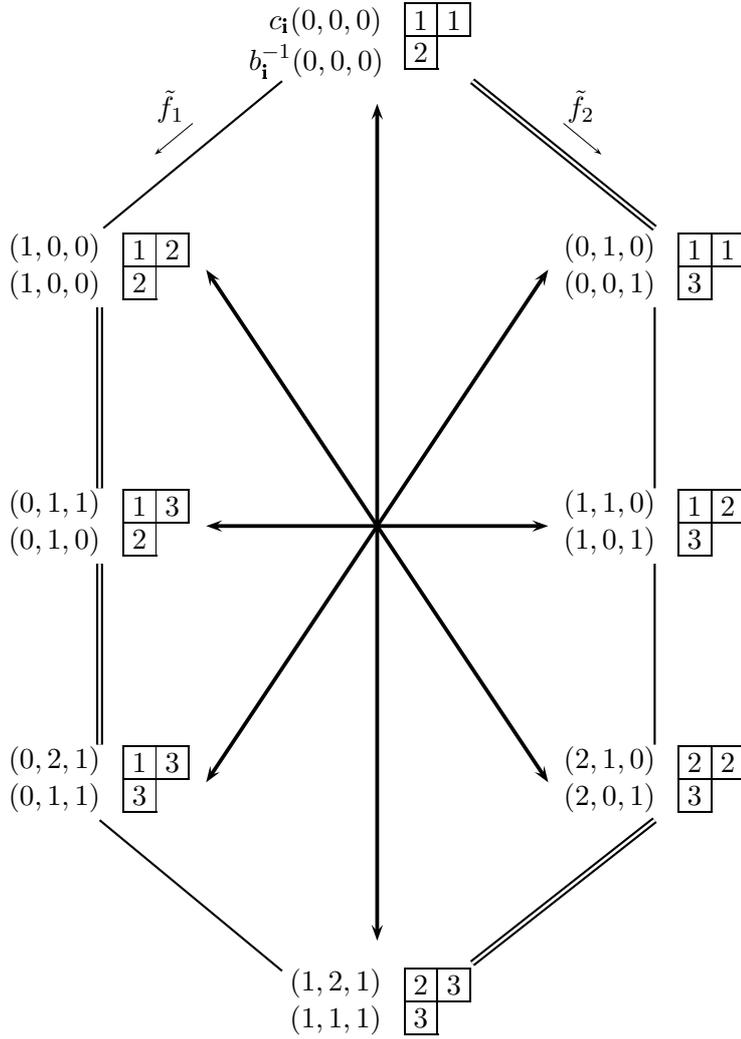


FIG. 3.2 – Action de  $w_0$  sur les éléments de  $\mathcal{B}(w_1 + w_2)$ .

$$\begin{aligned} \delta(E_i) &= E_{i^*}, & \delta(F_i) &= F_{i^*}, & \delta(H_i) &= H_{i^*} \\ \eta(E_i) &= F_{i^*}, & \eta(F_i) &= E_{i^*}, & \eta(H_i) &= -H_{i^*} \end{aligned}$$

On remarque qu'à une constante multiplicative près, l'automorphisme  $\eta$  coïncide avec l'action de  $w_0$ .

Pour la suite on fixe un poids dominant  $\lambda \in P^+$ .

Pour tout automorphisme  $\chi$  de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ , on peut considérer le module tordu  $V(\lambda)^\chi$  isomorphe en tant qu'espace au module  $V(\lambda)$  et muni de l'action  $u*v = \chi(u).v$ ,  $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ ,  $v \in V(\lambda)$ . Le module  $V(\lambda)^\chi$  est encore simple, donc on a  $V(\lambda)^\chi \simeq V(\lambda^\chi)$ , pour un certain  $\lambda^\chi \in P^+$ . L'automorphisme  $\chi$  induit alors un isomorphisme d'espaces vectoriels (unique à constante multiplicative près

d'après le lemme de Schur)  $\chi_\lambda$  entre les modules  $V(\lambda)$  et  $V(\lambda^x)$ , vérifiant  $\chi_\lambda(u.v) = \chi(u)\chi_\lambda(v)$ .

Décrivons ces isomorphismes dans les cas où  $\chi = \eta, \delta$  et  $\phi$ . Puisque l'isomorphisme  $\eta_\lambda : V(\lambda) \rightarrow V(\lambda^\eta)$  satisfait  $\eta_\lambda(u.v) = \eta(u)\eta_\lambda(v)$ , on a :

$$E_i \eta_\lambda(v_\lambda) = \eta(E_{i^*})\eta_\lambda(v_\lambda) = \eta_\lambda(E_{i^*}v_\lambda) = 0, \forall 1 \leq i \leq n$$

Le vecteur  $\eta_\lambda(v_\lambda)$  est donc un vecteur de plus bas poids dans le module tordu  $V(\lambda^\eta)$ . Déterminons le poids de  $\eta_\lambda(v_\lambda)$ . Pour tout  $1 \leq i \leq n$ , on a :

$$\begin{aligned} H_i \eta_\lambda(v_\lambda) &= \eta_\lambda(-H_{i^*}v_\lambda) = \eta_\lambda(-\langle \lambda, \alpha_{i^*}^\vee \rangle v_\lambda) = -\langle \lambda, \alpha_{i^*}^\vee \rangle \eta_\lambda(v_\lambda) \\ &= \langle w_0(\lambda), \alpha_i^\vee \rangle \eta_\lambda(v_\lambda) \end{aligned}$$

D'où  $\eta_\lambda(v_\lambda)$  est un vecteur de plus bas poids, de poids  $w_0(\lambda)$ . On en déduit que  $V(\lambda^\eta) \simeq V(\lambda)$  et que  $\eta_\lambda(v_\lambda)$  est proportionnel à  $v_\lambda^{low}$ .

On normalise en posant  $\eta_\lambda(v_\lambda) = v_\lambda^{low}$ . En résumé on a :

$$\eta_\lambda : V(\lambda) \rightarrow V(\lambda) \text{ avec } \eta_\lambda(uv_\lambda) = \eta(u)v_\lambda^{low}, \forall u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$$

De manière analogue on montre que les automorphismes  $\phi$  et  $\delta$  induisent les isomorphismes d'espaces vectoriels suivants (que l'on normalise par le choix de l'image de  $v_\lambda$ ) :

$$\begin{aligned} \phi_\lambda : V(\lambda) &\rightarrow V(\lambda^*) \quad \text{avec } \phi_\lambda(uv_\lambda) = \phi(u)v_{\lambda^*}^{low}, \forall u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \\ \delta_\lambda : V(\lambda) &\rightarrow V(\lambda^*) \quad \text{avec } \delta_\lambda(uv_\lambda) = \delta(u)v_{\lambda^*}, \forall u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \end{aligned} \tag{3.14}$$

L'isomorphisme  $\phi_\lambda$  est compatible avec la base canonique dans le sens suivant :

**Proposition 3.3.3.** [29, §21] On a :

- (i)  $\phi_\lambda(\mathcal{B}(\lambda)v_\lambda) = \mathcal{B}(\lambda^*)v_{\lambda^*}$
- (ii)  $\forall 1 \leq i \leq n, \forall b \in \mathcal{B}(\lambda), \tilde{e}_i \phi_\lambda(b) = \phi_\lambda \tilde{f}_i(b)$

Il est clair de par les définitions que  $\delta(b_{\mathbf{i}}(t)) = b_{\mathbf{i}^*}(t)$ , et que  $\eta_\lambda = \delta_{\lambda^*} \phi_\lambda$ . D'où, on a aussi :

$$\begin{aligned} \delta_\lambda(\mathcal{B}(\lambda)v_\lambda) &= \mathcal{B}(\lambda^*)v_{\lambda^*} \\ \eta_\lambda(\mathcal{B}(\lambda)v_\lambda) &= \mathcal{B}(\lambda)v_\lambda \end{aligned}$$

Le fait important ici est que l'isomorphisme  $\eta_\lambda$  stabilise la base  $\mathcal{B}(\lambda)$ . Dans le cas où  $G = SL(n)$  l'isomorphisme  $\eta_\lambda$  coïncide avec l'involution de Schützenberger  $S : Y(\lambda) \rightarrow Y(\lambda)$  définie sur les tableaux de Young. En effet, on a :

**Proposition 3.3.4.** [4] Soit  $T \in Y(\lambda)$  et soit  $b_T \in \mathcal{B}(\lambda)$  associé à  $T$ ,

$$\eta_\lambda(b_T) = b_{S(T)}$$

On appellera donc  $\eta_\lambda$  involution de Schützenberger (généralisée).

### 3.4 Analogie géométrique de l'involution de Schützenberger

Dans la suite de cette section on cherche à expliciter l'isomorphisme  $\eta_\lambda$  en termes de paramétrisations de la base canonique.

C'est à dire, trouver l'application "?" du diagramme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{B}(\lambda) & \xrightarrow{\eta_\lambda} & \mathcal{B}(\lambda) \\
 b & & b' \\
 b_i^{-1}, c_i \downarrow & & \downarrow b_i'^{-1}, c_i' \\
 (t_1, \dots, t_N) & \xrightarrow{?} & (t'_1, \dots, t'_N)
 \end{array}$$

On va voir que cette application s'exprime simplement lorsque l'on choisit d'exprimer la paramétrisation de Lusztig  $t' = (t'_1, \dots, t'_N)$  de l'élément  $b' = \eta_\lambda(b)$  en fonction de la paramétrisation en corde  $t = (t_1, \dots, t_N)$  de l'élément  $b$ .

Le calcul consiste à définir un analogue géométrique de  $\eta_\lambda$ , noté  $\xi$ , et d'utiliser la tropicalisation. Ce que l'on résume par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{B}(\lambda) & \xrightarrow{\eta_\lambda} & \mathcal{B}(\lambda) \\
 c_i \downarrow & & \downarrow b_i'^{-1} \\
 (t_1, \dots, t_N) & \xrightarrow{?} & (t'_1, \dots, t'_N) \\
 [\cdot]_{\text{Tr}} \uparrow & & \uparrow [\cdot]_{\text{Tr}} \\
 (t_1, \dots, t_N) & \xrightarrow{??} & (t'_1, \dots, t'_N) \\
 x_{-i} \downarrow & & \downarrow x_i \\
 L_{>0}^{w_0, e} & \xrightarrow{\xi} & L_{>0}^{e, w_0}
 \end{array} \tag{3.15}$$

On va d'abord résoudre ce problème en considérant l'isomorphisme  $\phi_\lambda$ , au lieu de  $\eta_\lambda$ , puis on effectue la composition  $\eta_\lambda = \delta_\lambda \circ \phi_\lambda$ .

#### 3.4.1 Relevé géométrique de l'involution $\phi_\lambda$

Soit  $\zeta : L_{>0}^{w_0, e} \rightarrow L_{>0}^{e, w_0}$  définie par  $\zeta(x) := [x^{tT}]_+$ . En utilisant le théorème 3.2.1 et les relations de commutation (3.6), on obtient aisément que l'application  $\zeta$  est bien définie et plus précisément,

**Proposition 3.4.1.** *Soit  $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_N)$  un mot réduit de  $w_0$ , et  $(t'_1, \dots, t'_N) = (x_{\mathbf{i}}^{-1} \circ \zeta \circ x_{-\mathbf{i}})(t_1, \dots, t_N)$ . On a alors*

$$t'_k = t_k^{-1} \prod_{j>k} t_j^{-a_{i_j i_k}} \tag{3.16}$$

**Preuve** — Par définition :

$$\zeta(x_{-\mathbf{i}})(t_1, \dots, t_N) = [x_{i_1}(t_1)t_1^{\alpha_{i_1}^\vee} \cdots x_{i_N}(t_N)t_N^{\alpha_{i_N}^\vee}]_+$$

Pour décomposer  $x_{i_1}(t_1)t_1^{\alpha_{i_1}^\vee} \cdots x_{i_N}(t_N)t_N^{\alpha_{i_N}^\vee}$  dans  $G_0 = U^-TU$ , on utilise les relations de commutation  $x_j(t')t^{\alpha_j^\vee} = t^{\alpha_j^\vee}x_j(t^{-a_{ij}}t')$  et  $t^{\alpha_i^\vee}t'^{\alpha_j^\vee} = t'^{\alpha_j^\vee}t^{\alpha_i^\vee}$ . On obtient dans un premier temps :

$$\begin{aligned} x_{i_1}(t_1)t_1^{\alpha_{i_1}^\vee} \cdots x_{i_N}(t_N)t_N^{\alpha_{i_N}^\vee} = \\ t_N^{\alpha_{i_N}^\vee} x_{i_1}(t_N^{-a_{i_N i_1}} t_1) t_1^{\alpha_{i_1}^\vee} \cdots x_{i_{N-1}}(t_N^{-a_{i_{N-1} i_{N-1}}} t_{N-1}) t_{N-1}^{\alpha_{i_{N-1}}^\vee} x_{i_N}(t_N^{-a_{i_N i_N}} t_N) \end{aligned}$$

Et ainsi de suite, on peut faire passer tous les  $t^{\alpha_i^\vee}$  à gauche, jusqu'à obtenir :

$$x_{i_1}(t_1)t_1^{\alpha_{i_1}^\vee} \cdots x_{i_N}(t_N)t_N^{\alpha_{i_N}^\vee} = t_N^{\alpha_{i_N}^\vee} \cdots t_1^{\alpha_{i_1}^\vee} x_{i_1}(t'_1) \cdots x_{i_{N-1}}(t'_{N-1}) x_{i_N}(t'_N)$$

avec  $t'_k = t_k^{-1} \prod_{j>k} t_j^{-a_{ij}i_k}$ .

D'où,

$$[x_{i_1}(t_1)t_1^{\alpha_{i_1}^\vee} \cdots x_{i_N}(t_N)t_N^{\alpha_{i_N}^\vee}]_+ = x_{i_1}(t'_1) \cdots x_{i_{N-1}}(t'_{N-1}) x_{i_N}(t'_N)$$

avec  $t'_k = t_k^{-1} \prod_{j>k} t_j^{-a_{ij}i_k}$ . □

L'expression (3.16) permet d'affirmer que  $x_{\mathbf{i}}^{-1} \circ \zeta \circ x_{-\mathbf{i}}$  est bijective, et avec le théorème 3.2.1 on a alors :

**Corollaire 3.4.2.** *L'application  $\zeta$  est bijective de  $L_{>0}^{w_0, e}$  sur  $L_{>0}^{e, w_0}$ .*

On fixe un poids  $\lambda$  dans  $P^+$ . On peut maintenant donner la formule du relèvement géométrique de  $\phi_\lambda$  :

**Théorème 3.4.3.** *Soit  $\mathbf{i}$  et  $\mathbf{i}'$  deux mots réduits de  $w_0$ . Les composantes  $(x_{\mathbf{i}}^{-1} \circ \zeta \circ x_{-\mathbf{i}'})^\vee$  sont des expressions rationnelles sans soustraction, et*

$$b_{\mathbf{i}}^{-1} \phi_\lambda c_{\mathbf{i}'}^{-1}(t) = [(x_{\mathbf{i}}^{-1} \circ \zeta \circ x_{-\mathbf{i}'})^\vee]_{\text{Tr}}(t) + b_{\mathbf{i}}^{-1} \phi_\lambda(v_\lambda)$$

**Preuve** — La formule explicite pour  $(x_{\mathbf{i}}^{-1} \circ \zeta \circ x_{-\mathbf{i}})^\vee$  s'obtient à partir de la proposition 3.4.1 en transposant la matrice de Cartan :

$$(x_{\mathbf{i}}^{-1} \circ \zeta \circ x_{-\mathbf{i}})^\vee(t_1, \dots, t_N) = (t_k^{-1} \prod_{j>k} t_j^{-a_{ik}i_j})_{1 \leq k \leq N} \quad (3.17)$$

On constate que les composantes de  $(x_{\mathbf{i}}^{-1} \circ \zeta \circ x_{-\mathbf{i}})^\vee$  sont des expressions rationnelles sans soustraction en  $t_1, \dots, t_N$ . Par conséquent, en composant à droite avec  $(x_{-\mathbf{i}'}^{-1} x_{-\mathbf{i}'})^\vee$  qui est aussi rationnelles sans soustraction, on en déduit que les composantes  $(x_{\mathbf{i}}^{-1} \circ \zeta \circ x_{-\mathbf{i}'})^\vee$  sont des expressions rationnelles sans soustraction.

Pour montrer la deuxième partie du théorème, on introduit une famille d'applications  $\Phi_{\mathbf{i}, \mathbf{i}'} : \mathcal{C}_{\mathbf{i}}(\lambda) \rightarrow \mathbb{Z}^N$  indexée par deux mots réduits de  $w_0$ , vérifiant les trois conditions suivantes :

- (1)  $\Phi_{\mathbf{i},\mathbf{i}'}(0, \dots, 0) = b_{\mathbf{i}}^{-1} \phi_{\lambda}(v_{\lambda})$
- (2)  $\Phi_{\mathbf{i},\mathbf{i}'} = R_{\mathbf{i}''}^{\mathbf{i}} \circ \Phi_{\mathbf{i}'',\mathbf{i}'} = \Phi_{\mathbf{i},\mathbf{i}''} \circ R_{-\mathbf{i}'}^{-\mathbf{i}''}$
- (3) Pour  $\Phi_{\mathbf{i},\mathbf{i}'}(t_1, \dots, t_N) = (t'_1, \dots, t'_N)$ , les éléments  $t'_1 + t_1$  et  $t'_k$ ,  $k \neq 1$ , ne dépendent pas de  $t_1$ .

Le théorème est une conséquence de la proposition suivante :

**Proposition 3.4.4.** *On a,*

(i) *Si  $(\Phi_{\mathbf{i},\mathbf{i}'})$  est une famille vérifiant les conditions (1), (2), (3), alors*

$$\Phi_{\mathbf{i},\mathbf{i}'} = b_{\mathbf{i}}^{-1} \phi_{\lambda} c_{\mathbf{i}'}^{-1}$$

(ii) *La famille  $(\Phi_{\mathbf{i},\mathbf{i}'})$  définie par*

$$\Phi_{\mathbf{i},\mathbf{i}'}(t) = [(x_{\mathbf{i}}^{-1} \circ \zeta \circ x_{-\mathbf{i}'})^{\vee}]_{\text{Tr}}(t) + b_{\mathbf{i}}^{-1} \phi_{\lambda}(v_{\lambda})$$

*vérifie les conditions (1), (2), (3).*

Commençons par prouver l'assertion (ii).

En remarquant que pour toute expression rationnelle sans soustraction  $Q$ , on a  $[Q]_{\text{Tr}}(0, \dots, 0) = 0$ , le point (1) est clair.

Pour vérifier le point (2), on fait un calcul direct. On utilise tout d'abord le corollaire 3.2.9.

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{i}''}^{\mathbf{i}}(\Phi_{\mathbf{i}'',\mathbf{i}'}(t)) &= R_{\mathbf{i}''}^{\mathbf{i}}\left([(x_{\mathbf{i}''}^{-1} \circ \zeta \circ x_{-\mathbf{i}'})^{\vee}]_{\text{Tr}}(t) + b_{\mathbf{i}''}^{-1} \phi_{\lambda}(v_{\lambda})\right) \\ &= R_{\mathbf{i}''}^{\mathbf{i}}\left([(x_{\mathbf{i}''}^{-1} \circ \zeta \circ x_{-\mathbf{i}'})^{\vee}]_{\text{Tr}}(t)\right) + R_{\mathbf{i}''}^{\mathbf{i}}(b_{\mathbf{i}''}^{-1} \phi_{\lambda}(v_{\lambda})) \end{aligned}$$

Puis en utilisant le Théorème 3.2.2, et la Proposition 3.1.9, on obtient :

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{i}''}^{\mathbf{i}}(\Phi_{\mathbf{i}'',\mathbf{i}'}(t)) &= [(\tilde{R}_{\mathbf{i}''}^{\mathbf{i}})^{\vee}]_{\text{Tr}}\left([(x_{\mathbf{i}''}^{-1} \circ \zeta \circ x_{-\mathbf{i}'})^{\vee}]_{\text{Tr}}(t)\right) + R_{\mathbf{i}''}^{\mathbf{i}} b_{\mathbf{i}''}^{-1} \phi_{\lambda}(v_{\lambda}) \\ &= [(\tilde{R}_{\mathbf{i}''}^{\mathbf{i}} \circ x_{\mathbf{i}''}^{-1} \circ \zeta \circ x_{-\mathbf{i}'})^{\vee}]_{\text{Tr}}(t) + R_{\mathbf{i}''}^{\mathbf{i}} b_{\mathbf{i}''}^{-1} \phi_{\lambda}(v_{\lambda}) \\ &= [(x_{\mathbf{i}}^{-1} \circ x_{\mathbf{i}''} \circ x_{\mathbf{i}''}^{-1} \circ \zeta \circ x_{-\mathbf{i}'})^{\vee}]_{\text{Tr}}(t) + b_{\mathbf{i}}^{-1} b_{\mathbf{i}''} b_{\mathbf{i}''}^{-1} \phi_{\lambda}(v_{\lambda}) \\ &= [(x_{\mathbf{i}}^{-1} \circ \zeta \circ x_{-\mathbf{i}'})^{\vee}]_{\text{Tr}}(t) + b_{\mathbf{i}}^{-1} \phi_{\lambda}(v_{\lambda}) \\ &= \Phi_{\mathbf{i},\mathbf{i}'}(t) \end{aligned}$$

La deuxième égalité du point (2) s'obtient par un calcul tout à fait similaire :

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbf{i},\mathbf{i}'}(R_{-\mathbf{i}'}^{-\mathbf{i}''}(t)) &= \Phi_{\mathbf{i},\mathbf{i}'}\left([\tilde{R}_{-\mathbf{i}'}^{-\mathbf{i}''}]_{\text{Tr}}(t)\right) \\ &= [(x_{\mathbf{i}}^{-1} \circ \zeta \circ x_{-\mathbf{i}'})^{\vee} \circ (\tilde{R}_{-\mathbf{i}'}^{-\mathbf{i}''})^{\vee}]_{\text{Tr}}(t) + b_{\mathbf{i}}^{-1} \phi_{\lambda}(v_{\lambda}) \\ &= [(x_{\mathbf{i}}^{-1} \circ \zeta \circ x_{-\mathbf{i}'} \circ x_{-\mathbf{i}''}^{-1} \circ x_{-\mathbf{i}''})^{\vee}]_{\text{Tr}}(t) + b_{\mathbf{i}}^{-1} \phi_{\lambda}(v_{\lambda}) \\ &= [(x_{\mathbf{i}}^{-1} \circ \zeta \circ x_{-\mathbf{i}'})^{\vee}]_{\text{Tr}}(t) + b_{\mathbf{i}}^{-1} \phi_{\lambda}(v_{\lambda}) \\ &= \Phi_{\mathbf{i},\mathbf{i}'}(t) \end{aligned}$$

La condition (3) s'obtient facilement en observant la formule explicite de  $\Phi_{\mathbf{i}, \mathbf{i}'}(t)$ . Cette formule se déduit de la formule (3.17) par tropicalisation. En notant  $(t'_1, \dots, t'_N) = \Phi_{\mathbf{i}, \mathbf{i}'}(t_1, \dots, t_N)$  et  $(l_1, \dots, l_N) = b_{\mathbf{i}}^{-1} \phi_\lambda(v_\lambda)$ , on a :

$$\begin{aligned} t'_1 &= l_1 - t_1 - \sum_{j>1} a_{i_1 i_j} t_j, \\ t'_k &= l_k - t_k - \sum_{j>k} a_{i_k i_j} t_j, \end{aligned}$$

On constate effectivement que  $t'_1 + t_1$  et  $t'_k$ ,  $k \neq 1$ , ne dépendent pas de  $t_1$ .

Reste à montrer le point (i) de la proposition.

Soit  $(\Phi_{\mathbf{i}, \mathbf{i}'})$  une famille vérifiant les conditions (1), (2), (3). On peut définir des applications  $F_{\mathbf{i}} : \mathcal{B}(\lambda) \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$  par :

$$F_{\mathbf{i}}(b) = \Phi_{\mathbf{i}, \mathbf{i}'} \circ c_{\mathbf{i}'}(b), \quad b \in \mathcal{B}(\lambda)$$

En effet ces applications ne dépendent pas de  $\mathbf{i}'$  par la condition (2).

Montrons par induction sur le poids de  $b$ , que pour tout mot  $\mathbf{i}$ ,  $F_{\mathbf{i}}(b) = b_{\mathbf{i}}^{-1}(\phi_\lambda(b))$ .

Si  $b = v_\lambda$ , c'est clair d'après (1). Si  $b = \tilde{f}_i(b')$ , on peut choisir un mot réduit  $\mathbf{i}'$  commençant par  $i$ , notons  $\mathbf{i}' = (i, i'_2, \dots, i'_N)$ . D'après 2.2.4, on a :

$$c_{\mathbf{i}'}(\tilde{f}_i(b')) = c_{\mathbf{i}'}(b') + (1, 0, \dots, 0)$$

Donc  $\tilde{f}_i(b')$  et  $b'$  ont mêmes coordonnées en cordes à l'exception de la première composante. D'après la condition (3) vérifiée par  $\Phi_{\mathbf{i}', \mathbf{i}'}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbf{i}', \mathbf{i}'} \circ c_{\mathbf{i}'}(\tilde{f}_i(b')) &= \Phi_{\mathbf{i}', \mathbf{i}'}(c_{\mathbf{i}'}(b') + (1, 0, \dots, 0)) \\ &= \Phi_{\mathbf{i}', \mathbf{i}'} \circ c_{\mathbf{i}'}(b') - (1, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{i}'}(b) &= \Phi_{\mathbf{i}', \mathbf{i}'} \circ c_{\mathbf{i}'}(\tilde{f}_i(b')) \\ &= \Phi_{\mathbf{i}', \mathbf{i}'} \circ c_{\mathbf{i}'}(b') - (1, 0, \dots, 0) \\ &= F_{\mathbf{i}'}(b') - (1, 0, \dots, 0) \\ &= b_{\mathbf{i}'}^{-1}(\phi_\lambda(b')) - (1, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

La dernière égalité ci-dessus provient de l'hypothèse de récurrence.

En utilisant 2.2.4, on en déduit que  $F_{\mathbf{i}'}(b) = b_{\mathbf{i}'}^{-1}(\tilde{e}_i \phi_\lambda(b'))$ . Utilisant 2.2.4 puis 3.3.3(ii), on obtient  $F_{\mathbf{i}'}(b) = b_{\mathbf{i}'}^{-1}(\tilde{e}_i \phi_\lambda(b')) = b_{\mathbf{i}'}^{-1}(\phi_\lambda(\tilde{f}_i b')) = b_{\mathbf{i}'}^{-1}(\phi_\lambda(b))$ . Enfin, avec (2) on en déduit  $F_{\mathbf{i}}(b) = b_{\mathbf{i}}^{-1}(\phi_\lambda(b))$  pour tout mot réduit  $\mathbf{i}$ . □

On obtient alors la formule suivante :

**Corollaire 3.4.5.** Pour  $(t'_1, \dots, t'_N) = b_{\mathbf{i}}^{-1} \phi_{\lambda} c_{\mathbf{i}}^{-1}(t_1, \dots, t_N)$ ,

$$t'_k = l_k - t_k - \sum_{j>k} a_{i_k i_j} t_j \quad (3.18)$$

où  $(l_1, \dots, l_N) := b_{\mathbf{i}}^{-1} \phi_{\lambda}(v_{\lambda}) = (\langle \lambda, \alpha_{i_k}^{\vee} \rangle)_{1 \leq k \leq N}$ .

### 3.4.2 Relevé géométrique de l'involution $\eta_{\lambda}$

Soit  $\mathbf{i}$  un mot réduit de  $w_0$ , alors on sait que  $\mathbf{i}^*$  est aussi un mot réduit de  $w_0$ . Il est clair que l'isomorphisme  $\delta_{\lambda^*}$  induit par  $\delta$  sur  $V(\lambda^*)$  vérifie  $\delta_{\lambda^*}(b_{\mathbf{i}}(t)) = b_{\mathbf{i}^*}(t)$ .

Nous pouvons donc maintenant donner la formule explicite de  $\eta_{\lambda}$  :

**Corollaire 3.4.6.** Soit  $(t'_1, \dots, t'_N) = b_{\mathbf{i}^*}^{-1} \eta_{\lambda}(c_{\mathbf{i}}^{-1}(t_1, \dots, t_N))$ , alors

$$t'_k = l_k - t_k - \sum_{j>k} a_{i_k i_j} t_j$$

où  $(l_1, \dots, l_N) := b_{\mathbf{i}^*}^{-1} \eta_{\lambda}(v_{\lambda}) = (\langle \lambda, \alpha_{i_k}^{\vee} \rangle)_{1 \leq k \leq N}$

**Preuve** — On utilise le fait que  $b_{\mathbf{i}^*}^{-1} \delta_{\lambda^*} b_{\mathbf{i}} = id$  et que  $\eta_{\lambda} = \delta_{\lambda^*} \phi_{\lambda}$ . Ainsi :

$$b_{\mathbf{i}^*}^{-1} \eta_{\lambda} c_{\mathbf{i}}^{-1}(t) = (b_{\mathbf{i}^*}^{-1} \delta_{\lambda^*} b_{\mathbf{i}}) (b_{\mathbf{i}}^{-1} \phi_{\lambda} c_{\mathbf{i}}^{-1})(t) = b_{\mathbf{i}}^{-1} \phi_{\lambda} c_{\mathbf{i}}^{-1}(t)$$

La formule est donnée en (3.18). De plus on remarque que  $b_{\mathbf{i}}^{-1} \phi_{\lambda}(v_{\lambda}) = b_{\mathbf{i}^*}^{-1} \eta_{\lambda}(v_{\lambda})$ . □

Il est remarquable que cette application  $b_{\mathbf{i}^*}^{-1} \eta_{\lambda} c_{\mathbf{i}}^{-1}$  soit affine, et que sa partie linéaire ne dépende pas de  $\lambda$ .

Par ailleurs, on rappelle que si  $\lambda = \lambda_1 \varpi_1 + \dots + \lambda_n \varpi_n$ , on a  $l_k = \langle \lambda, \alpha_{i_k}^{\vee} \rangle = \lambda_{i_k}$ . Ainsi, pour tout mot réduit  $\mathbf{i}$ , on définit une application linéaire  $\Omega_{\mathbf{i}}$  en posant, pour tout  $(\lambda, t) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n, t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{R}^{n+N}$ ,

$$\Omega_{\mathbf{i}}(\lambda, t) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n, t'_1, \dots, t'_N), \text{ avec } t'_k = \lambda_{i_k} - t_k - \sum_{j>k} a_{i_k i_j} t_j$$

Autrement dit, si  $b$  est un élément de  $\mathcal{B}(\lambda)$  alors  $\Omega_{\mathbf{i}}(\lambda, c_{\mathbf{i}}(b)) = (\lambda, b_{\mathbf{i}^*}^{-1} \eta_{\lambda}(b))$ .

Déterminons maintenant le relevé géométrique de  $\eta_{\lambda}$ , c'est à dire l'application  $\xi$  dans le diagramme (3.15).

Etant donné  $x \in G$ , on pose  $\xi(x) := [\overline{w_0}(x^{-1})^{\overline{w_0^{-1}}}]_+$ .

#### Proposition 3.4.7.

- (i) L'application  $\xi$  définit une bijection de  $L_{>0}^{w_0, e}$  sur  $L_{>0}^{e, w_0}$ ,
- (ii) Les composantes de  $(x_{\mathbf{i}}^{-1} \circ \xi \circ x_{-\mathbf{i}'})^{\vee}$  sont des expressions rationnelles sans soustraction.

(iii) On a :

$$b_{\mathbf{i}}^{-1} \eta_{\lambda} c_{\mathbf{i}'}^{-1}(t) = [(x_{\mathbf{i}}^{-1} \circ \xi \circ x_{-\mathbf{i}'})^{\vee}]_{\text{Tr}}(t) + b_{\mathbf{i}}^{-1} \eta_{\lambda}(v_{\lambda}).$$

**Preuve** — On remarque que  $\overline{w_0} y_{\mathbf{i}}(t) \overline{w_0}^{-1} = x_{\mathbf{i}^*}(-t)$  et  $\overline{w_0} t^{\alpha_{\mathbf{i}}} \overline{w_0}^{-1} = t^{-\alpha_{\mathbf{i}^*}}$ . Ainsi, on a  $\xi(x_{-\mathbf{i}}(t_1, \dots, t_N)) = \zeta(x_{-\mathbf{i}^*}(t_1, \dots, t_N))$ .

On sait par le théorème 3.2.1 que pour tout  $\mathbf{i}$  l'application  $x_{-\mathbf{i}}$  est une bijection de  $\mathbb{R}_{>0}^N$  sur  $L_{>0}^{w_0, e}$ , et on sait par le corollaire 3.4.2 que  $\zeta$  est bijective de  $L_{>0}^{w_0, e}$  sur  $L_{>0}^{e, w_0}$ . Le point (i) est clair.

On a  $(x_{\mathbf{i}}^{-1} \circ \xi \circ x_{-\mathbf{i}'})^{\vee} = (x_{\mathbf{i}}^{-1} \circ \zeta \circ x_{-\mathbf{i}'^*})^{\vee}$ . On sait par le théorème 3.2.2 que  $(x_{\mathbf{i}}^{-1} \circ \zeta \circ x_{-\mathbf{i}'^*})^{\vee}$  est donnée par des expressions rationnelles sans soustraction, d'où (ii).

Enfin, on a déjà vu (voir corollaire 3.4.6) que :  $b_{\mathbf{i}^*}^{-1} \eta_{\lambda} c_{\mathbf{i}}^{-1}(t) = b_{\mathbf{i}}^{-1} \phi_{\lambda} c_{\mathbf{i}}^{-1}(t)$ . D'où, en invertissant les rôles de  $\mathbf{i}$  et  $\mathbf{i}^*$  et en utilisant le théorème 3.4.3 :

$$\begin{aligned} b_{\mathbf{i}}^{-1} \eta_{\lambda} c_{\mathbf{i}^*}^{-1}(t) &= b_{\mathbf{i}^*}^{-1} \phi_{\lambda} c_{\mathbf{i}^*}^{-1}(t) \\ &= [(x_{\mathbf{i}^*}^{-1} \circ \zeta \circ x_{-\mathbf{i}})^{\vee}]_{\text{Tr}}(t) + b_{\mathbf{i}^*}^{-1} \phi_{\lambda}(v_{\lambda}) \end{aligned}$$

On remarque que  $x_{\mathbf{i}^*}^{-1} \circ \zeta \circ x_{-\mathbf{i}} = x_{\mathbf{i}}^{-1} \circ \zeta \circ x_{-\mathbf{i}}$  car on connaît les formules d'après 3.16 et on sait que les coefficients de la matrice de Cartan vérifient  $a_{i^* j^*} = a_{ij}$ . On a déjà remarqué (voir corollaire 3.4.6) que  $b_{\mathbf{i}^*}^{-1} \phi_{\lambda}(v_{\lambda}) = b_{\mathbf{i}}^{-1} \eta_{\lambda}(v_{\lambda})$ . Donc finalement :

$$\begin{aligned} b_{\mathbf{i}}^{-1} \eta_{\lambda} c_{\mathbf{i}^*}^{-1}(t) &= [(x_{\mathbf{i}}^{-1} \circ \zeta \circ x_{-\mathbf{i}})^{\vee}]_{\text{Tr}}(t) + b_{\mathbf{i}}^{-1} \eta_{\lambda}(v_{\lambda}) \\ &= [(x_{\mathbf{i}}^{-1} \circ \xi \circ x_{-\mathbf{i}'})^{\vee}]_{\text{Tr}}(t) + b_{\mathbf{i}}^{-1} \eta_{\lambda}(v_{\lambda}) \end{aligned}$$

Enfin on peut faire un changement de mot réduit en substituant  $c_{\mathbf{i}^*} c_{\mathbf{i}'}^{-1}(t) = [(x_{\mathbf{i}^*}^{-1} x_{-\mathbf{i}'})^{\vee}]_{\text{Tr}}(t)$  à  $t$  dans la formule ci-dessus et on obtient :

$$b_{\mathbf{i}}^{-1} \eta_{\lambda} c_{\mathbf{i}'}^{-1}(t) = [(x_{\mathbf{i}}^{-1} \circ \xi \circ x_{-\mathbf{i}'})^{\vee}]_{\text{Tr}}(t) + b_{\mathbf{i}}^{-1} \eta_{\lambda}(v_{\lambda})$$

□

**Exemple 3.4.8.** Dans le cas  $A_2$ , soit  $b$  un élément de  $\mathcal{B}(\lambda_1 \varpi_1 + \lambda_2 \varpi_2)$ , notons  $(t_1, t_2, t_3) = c_{121}(b)$  et  $\eta_{\lambda}(b) = b_{212}(t'_1, t'_2, t'_3)$  alors,

$$\begin{cases} t'_1 &= \lambda_1 - t_1 + t_2 - 2t_3 \\ t'_2 &= \lambda_2 - t_2 + t_3 \\ t'_3 &= \lambda_1 - t_3 \end{cases}$$

Et si  $(t_1, t_2, t_3) = c_{121}(b)$  et  $\eta_{\lambda}(b) = b_{121}(t''_1, t''_2, t''_3)$  alors,

$$\begin{cases} t''_1 &= \lambda_2 + t_1 - t_2 + 2t_3 - \min(t_1 + t_3, t_2) \\ t''_2 &= \lambda_1 - t_1 - 2t_3 + \min(t_1 + t_3, t_2) \\ t''_3 &= \lambda_2 + t_3 - \min(t_1 + t_3, t_2) \end{cases}$$

**Exemple 3.4.9.** Dans le cas  $B_2$ , soit  $b$  un élément de  $\mathcal{B}(\lambda_1\varpi_1 + \lambda_2\varpi_2)$ , notons  $(t_1, t_2, t_3, t_4) = c_{1212}(b)$  et  $\eta_\lambda(b) = b_{1212}(t'_1, t'_2, t'_3, t'_4)$  alors,

$$\begin{cases} t'_1 &= \lambda_1 - t_1 + t_2 - 2t_3 + t_4 \\ t'_2 &= \lambda_2 - t_2 + 2t_3 - 2t_4 \\ t'_3 &= \lambda_1 - t_3 + t_4 \\ t'_4 &= \lambda_2 - t_4 \end{cases}$$

### 3.4.3 Formules des applications inverses

On s'intéresse ici aux applications inverses  $c_{\mathbf{i}}\phi_\lambda b_{\mathbf{i}}$  et  $\zeta^{-1}$ . Les formules explicites de la proposition suivante ont été calculées dans [10] :

**Proposition 3.4.10.** *Soit  $\mathbf{i}$  un mot réduit et  $\lambda$  un poids dominant. On a :*

(i) *Si  $(t_1, \dots, t_N) = x_{-\mathbf{i}}^{-1}\zeta^{-1}x_{\mathbf{i}}(t'_1, \dots, t'_N)$ , alors*

$$t_k = t'_k{}^{-1} \prod_{j>k} t'_j{}^{-a'_{i_j i_k}}, \quad 1 \leq k \leq N \quad (3.19)$$

où  $a'_{i_j i_k} = \langle \beta_{\mathbf{i},k}, \beta_{\mathbf{i},j}^\vee \rangle$ .

(ii) *Si  $(t_1, \dots, t_N) = c_{\mathbf{i}}\phi_\lambda b_{\mathbf{i}}(t'_1, \dots, t'_N)$  alors*

$$t_k = l'_k - t'_k - \sum_{j>k} a'_{i_k i_j} t'_j, \quad 1 \leq k \leq N \quad (3.20)$$

où  $a'_{i_j i_k} = \langle \beta_{\mathbf{i},k}, \beta_{\mathbf{i},j}^\vee \rangle$  et  $l'_k = \langle \lambda, \beta_k^\vee \rangle$ .

(Les éléments  $\beta_{\mathbf{i},k}$  ont été définis en 2.1.2).

**Preuve** — On sait par (3.16), que :

$$t'_k = t_k^{-1} \prod_{j>k} t_j^{-a_{i_j i_k}}, \quad 1 \leq k \leq N$$

Il suffit alors de vérifier qu'en substituant ces expressions dans le membre de droite de 3.19 on obtient  $t_k$ . On remarque en utilisant l'invariance de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  par  $W$ , que pour tout  $1 < k < j < n$  :

$$\begin{aligned} a'_{i_j i_k} &= \langle s_{i_1} \cdots s_{i_{k-1}} \alpha_{i_k}, s_{i_1} \cdots s_{i_{j-1}} \alpha_{i_j}^\vee \rangle \\ &= \langle s_{i_{j-1}} \cdots s_{i_k} \alpha_{i_k}, \alpha_{i_j}^\vee \rangle. \end{aligned}$$

Il s'agit donc de calculer :

$$\left( t_k^{-1} \prod_{l>k} t_l^{-a_{i_l i_k}} \right)^{-1} \prod_{j>k} \left( t_j^{-1} \prod_{l>j} t_l^{-a_{i_l i_j}} \right)^{-\langle s_{i_{j-1}} \cdots s_{i_k} \alpha_{i_k}, \alpha_{i_j}^\vee \rangle}.$$

Il est clair que l'exposant de  $t_k$  dans cette expression est 1, et que si  $l < k$ , alors l'exposant de  $t_l$  est zero. Montrons que dans le cas  $l > k$  l'exposant de  $t_l$  est aussi zero. L'exposant de  $t_l$  est donné par :

$$a_{i_l, i_k} + \left( \sum_{l>j>k} a_{i_l, i_j} \langle s_{i_{j-1}} \cdots s_{i_k} \alpha_{i_k}, \alpha_{i_j}^\vee \rangle \right) + \langle s_{i_{l-1}} \cdots s_{i_k} \alpha_{i_k}, \alpha_{i_l}^\vee \rangle.$$

Puisque  $s_{i_j}(\alpha_{i_l}^\vee) = \alpha_{i_l}^\vee - a_{i_l, i_j} \alpha_{i_j}^\vee$ , ceci est égal à :

$$\begin{aligned} \langle \alpha_{i_k}, \alpha_{i_l}^\vee \rangle + \left( \sum_{l>j>k} \langle s_{i_{j-1}} \cdots s_{i_k} \alpha_{i_k}, \alpha_{i_l}^\vee \rangle - \langle s_{i_{j-1}} \cdots s_{i_k} \alpha_{i_k}, s_{i_j} \alpha_{i_l}^\vee \rangle \right) \\ + \langle s_{i_{l-1}} \cdots s_{i_k} \alpha_{i_k}, \alpha_{i_l}^\vee \rangle. \end{aligned}$$

Les termes de la somme se simplifient deux à deux pour donner :

$$\langle \alpha_{i_k}, \alpha_{i_l}^\vee \rangle + \langle s_{i_k} \alpha_{i_k}, \alpha_{i_l}^\vee \rangle - \langle s_{i_{l-1}} \cdots s_{i_k} \alpha_{i_k}, \alpha_{i_l}^\vee \rangle + \langle s_{i_{l-1}} \cdots s_{i_k} \alpha_{i_k}, \alpha_{i_l}^\vee \rangle = 0,$$

et c'est ce qu'on voulait.

Pour le point [(ii)], il s'agit d'inverser l'application affine (3.18). La constante de l'application affine inverse est  $c_i(v_{\lambda^*}^{low})$ . On rappelle (voir 2.3.5) que cette constante vaut  $(\langle \lambda, \beta_{i,k}^\vee \rangle)_{1 \leq k \leq N}$ . Pour inverser la partie linéaire c'est un calcul par substitution tout à fait similaire à celui ci-dessus qui mène au résultat énoncé. □

**Proposition 3.4.11.** *L'application inverse  $\zeta^{-1} : L_{>0}^{e, w_0} \rightarrow L_{>0}^{w_0, e}$  est donnée par :*

$$\zeta^{-1}(x) = [\overline{w_0}^{-1} x^T]_0 x^{tT}$$

**Preuve** — Vérifions que l'application ci-dessus est bien définie en utilisant les définitions (3.9) et les relations (3.6). Soit  $x \in L_{>0}^{e, w_0}$ , notons  $y := [\overline{w_0} x^T]_0 x^{tT}$  et montrons que  $y \in L_{>0}^{w_0, e}$ . Puisque  $x \in U \cap B^- \overline{w_0} B^- \cap G_{>0}$ , on peut écrire  $x$  sous la forme :

$$x = n_1 h_1 \overline{w_0} h_2 n_2, \quad \text{avec } n_1, n_2 \in U^-, h_1, h_2 \in T$$

En utilisant le fait que  $\overline{w_0}$  normalise  $T$  et que  $\overline{w_0}^2 \in T$ , on peut simplifier

$$h_1 \overline{w_0} h_2 = h \overline{w_0}^{-1}, \quad h \in T$$

Désormais,

$$x = n_1 h \overline{w_0}^{-1} n_2, \quad \text{avec } n_1, n_2 \in U^-, h \in T$$

Ainsi,

$$\overline{w_0}^{-1} x^T = \overline{w_0}^{-1} n_2^T (\overline{w_0}^{-1})^T h^T n_1^T = \underbrace{\overline{w_0}^{-1} n_2^T \overline{w_0}}_{\in U^-} \underbrace{h}_{\in T} \underbrace{n_1^T}_{\in U}$$

d'où  $h = [\overline{w_0}^{-1}x^T]_0$  et donc

$$y = [\overline{w_0}^{-1}x^T]_0 x^{\iota T} = \underbrace{h}_{\in T} \underbrace{n_1^{\iota T}}_{\in U} h^{\iota T} (\overline{w_0}^{-1})^{\iota T} n_2^{\iota T}$$

On fait commuter les deux éléments de  $T$  et  $U$  ci-dessus, et compte tenu du fait que  $h^{\iota T} = h^{-1}$  et que  $(\overline{w_0}^{-1})^{\iota T} = \overline{w_0}$ , on obtient :

$$y = \underbrace{n_1^{\iota T}}_{\in U} \overline{w_0} \underbrace{n_2^{\iota T}}_{\in U}$$

Par ailleurs  $x \in U$ , donc  $y = [\overline{w_0}x^T]_0 x^{\iota T} \in B^-$ , et donc  $y \in L^{w_0, e} = U\overline{w_0}U \cap B^-$ . Il reste à vérifier la positivité de  $y$ . Fixons  $\mathbf{i}$  un mot réduit de  $w_0$ , et utilisons le théorème 3.2.1 pour  $x$  et  $y$ . On peut écrire  $y = x_{-\mathbf{i}}(t_1, \dots, t_N) = y_{i_1}(t_1)t_1^{-\alpha_{i_1}^\vee} \cdots y_{i_N}(t_N)t_N^{-\alpha_{i_N}^\vee}$  avec  $(t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{C}_{\neq 0}^N$ . En utilisant les relations de commutation (3.6) on écrit  $y = hy_{i_1}(t'_1) \cdots y_{i_N}(t'_N)$  avec  $h \in T$  et  $t'_k = t_k \prod_{j>k} t_j^{a_{j i_k}}$ . Mais il existe aussi  $(t''_1, \dots, t''_N) \in \mathbb{R}_{>0}^N$  tel que  $x = x_{\mathbf{i}}(t''_1, \dots, t''_N)$ . Donc  $y = [\overline{w_0}x^T]_0 x^{\iota T} = [\overline{w_0}x^T]_0 y_{i_1}(t''_1) \cdots y_{i_N}(t''_N)$ . En identifiant les deux écritures on en déduit que  $(t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{R}_{>0}^N$  et donc finalement  $y = [\overline{w_0}x^T]_0 x^{\iota T} \in L_{>0}^{w_0, e}$ . L'application donnée dans l'énoncé est donc bien définie. De plus on voit facilement que  $\zeta([\overline{w_0}x^T]_0 x^{\iota T}) = x$  donc c'est bien la réciproque de  $\zeta$ .

□



## Chapitre 4

# Dégénérescences toriques des variétés de Richardson

La dégénérescence torique de variétés est un problème traité dans de nombreux articles ces dernières années. Le cas des dégénérescences des variétés de drapeaux et des variétés de Schubert a été abordé par différents auteurs, à commencer par Gonciulea et Lakshmibai, [17], citons également les travaux de [11], [7]. Le cas d'une classe plus large de variétés, les variétés dites sphériques, a été traité récemment dans [1].

Dans ce chapitre on s'intéresse au problème de dégénérescence torique des variétés de Richardson. Ces variétés ont été introduites dans [36]. Ce sont des sous-variétés de la variété de drapeaux  $G/B$  où  $G$  est un groupe de Lie semi-simple et  $B$  un sous groupe de Borel, définies comme l'intersection d'une variété de Schubert  $\overline{BwB/B}$  et d'une Schubert opposée  $\overline{B^{-1}\tau B/B}$ . Le chapitre est organisé comme suit :

Le premier sous-chapitre concerne les variétés toriques. Le premier paragraphe reprend en grande partie les définitions et les notations de [16]. On y présente la construction usuelle à partir d'éventail de cônes. Le deuxième paragraphe présente une construction d'une variété torique à partir d'un polytope ; à un polytope  $\mathcal{P}$  on associe une algèbre  $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$  telle que  $\text{Proj}(\mathcal{A}_{\mathcal{P}})$  soit une variété torique. Enfin, on donne des exemples en reconstituant l'éventail associé à des variétés toriques.

Au deuxième sous-chapitre on commence par présenter le problème de dégénérescence ainsi que la méthode de résolution que l'on utilise. Cette méthode est basée sur une approche algébrique, et consiste à munir l'algèbre de coordonnées associée à la variété, d'une filtration telle que le gradué associé soit de type  $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$  pour un certain polytope. On traite successivement les cas des variétés de drapeaux, variétés de Schubert et variétés de Richardson. Une variété de Schubert opposée est l'image par  $w_0$  d'une variété de Schubert, les algèbres associées se déduisent par l'involution de Schützenberger généralisée. On est alors amené à utiliser les résultats du chapitre 3.

## 4.1 Variétés toriques

### 4.1.1 Définition

Une variété torique est une variété normale qui contient un tore  $T$  comme un sous-ensemble ouvert dense et sur laquelle le tore agit en prolongeant l'action naturelle de  $T$  sur lui-même.

Le premier exemple que l'on peut donner est celui des espaces projectifs  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  avec le tore  $T = (\mathbb{C}^*)^n$ .

La construction classique d'une variété torique se fait à partir d'un réseau  $N$ , isomorphe à  $\mathbb{Z}^n$ , et d'un ensemble  $\Delta$  de cônes supposés strictement convexes, rationnels et polyédriques, vivant dans l'espace vectoriel réel  $N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ . L'ensemble  $\Delta$  forme un *éventail complet*, c'est à dire que chaque face d'un cône de  $\Delta$  ainsi que toute intersection de deux cônes de  $\Delta$ , est encore un cône de  $\Delta$  et tout point de  $N_{\mathbb{R}}$  appartient à un cône. Nous allons construire la variété torique  $X(\Delta)$  associée à  $\Delta$ .

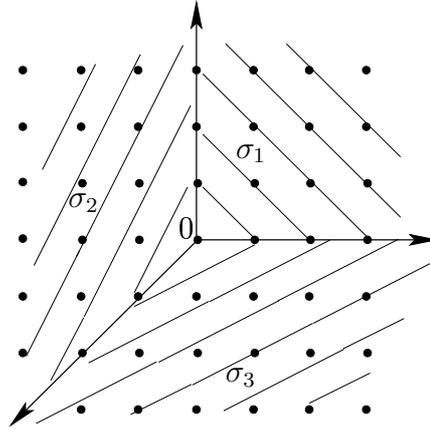


FIG. 4.1 – Eventail de l'exemple 4.1.1

**Exemple 4.1.1.** Par exemple, la figure 4.1 est la donnée de départ pour construire une variété torique. Le réseau  $N$  est le réseau  $\mathbb{Z}^2$  et l'éventail  $\Delta$  est l'ensemble de sept cônes  $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_1 \cap \sigma_2, \sigma_1 \cap \sigma_3, \sigma_2 \cap \sigma_3, \{0\}\}$ .

#### Définition des ouverts affines qui recouvrent $X(\Delta)$ :

A chaque cône  $\sigma$  de  $\Delta$  on associe un ouvert affine  $U_\sigma$  défini de la manière suivante.

On considère d'abord le réseau  $M = \text{Hom}(N, \mathbb{Z})$  dual de  $N$ , et on note  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le couplage naturel sur  $N \times M$ . A tout  $\sigma \in \Delta$  on associe son cône dual  $\sigma^\vee$  dans  $M_{\mathbb{R}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  :

$$\sigma^\vee := \{u \in M_{\mathbb{R}}, / \langle v, u \rangle \geq 0, \forall v \in \sigma\}$$

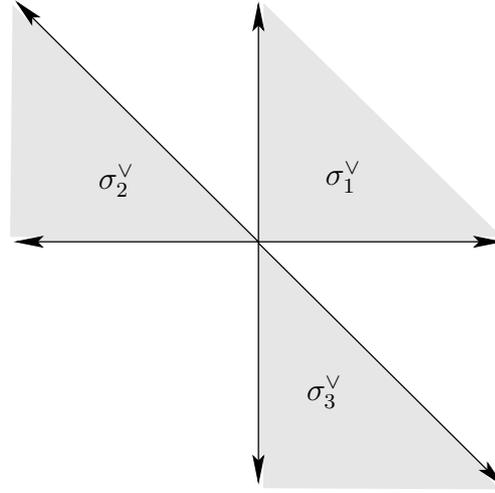


FIG. 4.2 – Cônes duaux dans l'exemple 4.1.1

Et on pose :

$$S_\sigma := \sigma^\vee \cap M$$

L'ensemble  $S_\sigma$  est un semi-groupe finiment engendré. On définit son algèbre de semi-groupe :

$$\mathbb{C}S_\sigma := \bigoplus_{u \in S_\sigma} \mathbb{C}e^u$$

Ici, l'exponentielle est juste une notation pour les éléments de la base. Le produit sur  $\mathbb{C}S_\sigma$  est donné par :

$$e^u e^{u'} = e^{u+u'}, \quad u, u' \in S_\sigma$$

L'algèbre  $\mathbb{C}S_\sigma$  est commutative et de type fini, on lui associe une variété affine :

$$U_\sigma := \text{Spec } \mathbb{C}S_\sigma$$

**Remarque 4.1.2.** Le cône  $\{0\}$  est toujours dans l'éventail, et l'ouvert qui lui est associé est :

$$U_{\{0\}} = \text{Spec } \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}] \simeq (\mathbb{C}^*)^n$$

**Exemple 4.1.3.** Dans l'exemple 4.1.1, on note  $\{e_1, e_2\}$  la base canonique de  $N$  et  $\{e_1^*, e_2^*\}$  la base canonique de  $M$ . On décrit les semi-groupes  $S_{\sigma_1}$ ,  $S_{\sigma_2}$ ,  $S_{\sigma_3}$  en termes de générateurs :

$$S_{\sigma_1} = \langle e_1^*, e_2^* \rangle, \quad S_{\sigma_2} = \langle -e_1^*, e_2^* - e_1^* \rangle, \quad S_{\sigma_3} = \langle -e_2^*, e_1^* - e_2^* \rangle$$

On pose  $X := e^{e_1^*}$ ,  $Y := e^{e_2^*}$ . On a :

$$\begin{aligned} U_{\sigma_1} &:= \text{Spec } \mathbb{C}[X, Y] && \simeq \mathbb{C}^2 \\ U_{\sigma_2} &:= \text{Spec } \mathbb{C}[X^{-1}, X^{-1}Y] && \simeq \mathbb{C}^2 \\ U_{\sigma_3} &:= \text{Spec } \mathbb{C}[Y^{-1}, XY^{-1}] && \simeq \mathbb{C}^2 \end{aligned}$$

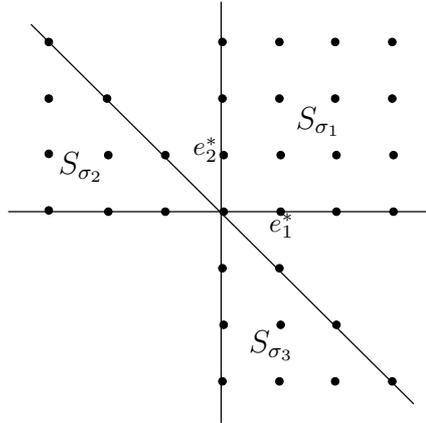


FIG. 4.3 – Semi-groupes dans l'exemple 4.1.1

**Recollement des ouverts  $U_\sigma$  :**

Soit  $\sigma, \tau \in \Delta$ , on utilise parfois la notation  $\tau \preceq \sigma$  pour signifier que  $\tau$  est une face de  $\sigma$ .

**Proposition 4.1.4.** [16] *Si  $\tau$  est une face de  $\sigma$ , alors :*

- (i)  $\sigma^\vee \cap \tau^\perp$  est une face de  $\sigma^\vee$ ,
- (ii) pour tout  $u$  dans l'intérieur relatif de  $\sigma^\vee \cap \tau^\perp$

$$S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-u) \tag{4.1}$$

L'égalité (4.1) donne une identité au niveau des algèbres :

$$\mathbb{C}S_\tau = (\mathbb{C}S_\sigma)_{e^u} = \text{le localisé de } \mathbb{C}S_\sigma \text{ en } e^u \tag{4.2}$$

qui se traduit comme une inclusion en tant qu'ouvert principal de  $U_\tau$  dans  $U_\sigma$ .

**Remarque 4.1.5.** Tout cône  $\sigma$  contient en tant que face le cône  $\{0\}$ . Ainsi tous les ouverts  $U_\sigma$  contiennent une copie du tore (voir remarque 4.1.2).

Si  $\tau = \sigma \cap \sigma'$ , alors  $\tau \preceq \sigma$  et  $\tau \preceq \sigma'$ . Les deux inclusions :

$$U_{\sigma'} \leftrightarrow U_{\sigma \cap \sigma'} \hookrightarrow U_\sigma$$

définissent le recollement  $U_\sigma \cap U_{\sigma'} = U_{\sigma \cap \sigma'}$ .

**Exemple 4.1.6.** Dans notre exemple, on voit que :

$$S_{\sigma_1 \cap \sigma_2} = S_{\sigma_1} + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-e_1^*) \text{ (cf Fig.4.4)} \quad \text{et} \quad S_{\sigma_1 \cap \sigma_2} = S_{\sigma_2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}(e_1^*)$$

D'où par (4.2) :

$$U_{\sigma_1 \cap \sigma_2} = \{(x, y) \in U_{\sigma_1} / x \neq 0\} = \{(x^{-1}, x^{-1}y) \in U_{\sigma_1} / x^{-1} \neq 0\}$$

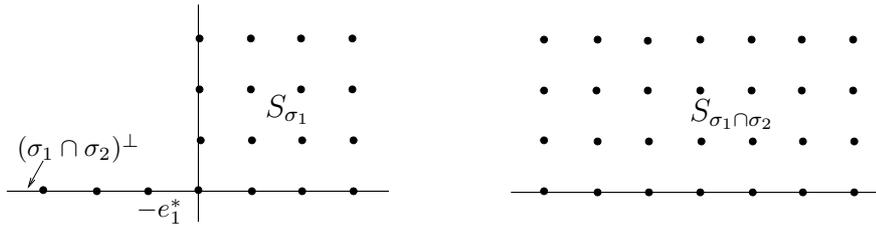


FIG. 4.4 –

Le recollement  $U_{\sigma_1} \cap U_{\sigma_2}$  est donné par  $(x, y) \leftrightarrow (x^{-1}, x^{-1}y)$ .

Finalement les trois ouverts se recollent de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccc}
 & U_{\sigma_1} : (x, y) & \\
 & \swarrow \quad \searrow & \\
 U_{\sigma_2} : (x^{-1}, x^{-1}y) & \longleftrightarrow & (y^{-1}, xy^{-1}) : U_{\sigma_3}
 \end{array} \tag{4.3}$$

On constate que c'est le même recollement pour les ouverts principaux de  $\mathbb{P}_2$ . En effet, si on note  $(t_1 : t_2 : t_3)$  les points de  $\mathbb{P}_2$  et :

$$\begin{aligned}
 U_1 &:= \{(t_1 : t_2 : t_3) \in \mathbb{P}_2, / t_1 \neq 0\} \simeq \mathbb{C}^2 = \{(\frac{t_2}{t_1}, \frac{t_3}{t_1})\} \\
 U_2 &:= \{(t_1 : t_2 : t_3) \in \mathbb{P}_2, / t_2 \neq 0\} \simeq \mathbb{C}^2 = \{(\frac{t_1}{t_2}, \frac{t_3}{t_2})\} \\
 U_3 &:= \{(t_1 : t_2 : t_3) \in \mathbb{P}_2, / t_3 \neq 0\} \simeq \mathbb{C}^2 = \{(\frac{t_1}{t_3}, \frac{t_2}{t_3})\}
 \end{aligned}$$

En posant  $x = t_2/t_1$  et  $y = t_3/t_1$ , les trois ouverts de  $\mathbb{P}_2$  se recollent par (4.3).

Finalement, la variété torique  $X(\Delta)$  construite à partir de l'éventail de la Figure 4.1, n'est autre que la variété projective  $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ .

**Action du tore sur la variété torique :**

On interprète certains objets introduits précédemment à l'aide d'homomorphismes de semi-groupes. En effet, les correspondances suivantes sont naturelles :

$$\begin{array}{c}
 \text{un point de } U_\sigma \\
 \Updownarrow \\
 \text{un idéal maximal de } \mathbb{C}S_\sigma \\
 \Updownarrow \\
 \text{un morphisme d'algèbres de } \mathbb{C}S_\sigma \rightarrow \mathbb{C} \\
 \Updownarrow \\
 \text{un morphisme de semi-groupes de } S_\sigma \rightarrow \mathbb{C}
 \end{array}$$

où la structure de semi-groupe à considérer sur  $\mathbb{C}$  est relative à la multiplication.

On peut faire les identifications suivantes :

$$\begin{aligned} U_\sigma &= \text{Hom}_{sg}(S_\sigma, \mathbb{C}) \\ T &= \text{Hom}_{sg}(M, \mathbb{C}^*) \end{aligned}$$

L'action d'un élément  $h \in T$  sur un point  $\varphi : S_\sigma \rightarrow \mathbb{C}$  est donné par :

$$h \cdot \varphi : u \mapsto h(u)\varphi(u)$$

Les orbites de  $T$  dans  $X(\Delta)$  ont été décrites dans [16] :

**Proposition 4.1.7.** [16] Pour  $\sigma \in \Delta$ , on pose  $\mathcal{O}_\sigma = \text{Hom}(\sigma^\perp \cap M, \mathbb{C}^*)$

- (i)  $\{\mathcal{O}_\sigma, \sigma \in \Delta\}$  est l'ensemble des  $T$ -orbites dans  $X(\Delta)$ ,
- (ii)  $\mathcal{O}_\sigma \simeq (\mathbb{C}^*)^{\text{codim}(\sigma)}$ ,
- (iii)  $\overline{\mathcal{O}_\sigma} = \bigsqcup_{\sigma \preceq \tau} \mathcal{O}_\tau$ .

### 4.1.2 Construction à partir d'un polytope

On peut construire des variétés toriques, en partant d'un polytope convexe rationnel.

Soit  $\mathcal{P}$  un polytope convexe rationnel contenu dans l'espace dual  $M_{\mathbb{R}}$ , tel que ses sommets soient des points de  $M$ . Voici deux constructions équivalentes :

1°) La première construction consiste à associer à  $\mathcal{P}$  un éventail  $\Delta_{\mathcal{P}}$  et de se ramener ainsi à la définition du paragraphe précédent.

Soit  $\mathcal{F}$  une face de  $\mathcal{P}$ , notons :

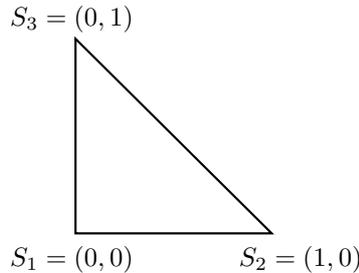
$$\sigma_{\mathcal{F}} := \{v \in N_{\mathbb{R}} / \langle u' - u, v \rangle \geq 0 \text{ pour tout } u \in \mathcal{F}, u' \in \mathcal{P}\}$$

Il est clair que l'ensemble  $\sigma_{\mathcal{F}}$  est un cône de  $N_{\mathbb{R}}$ , de plus :

**Proposition 4.1.8.** [16] L'ensemble des cônes  $\sigma_{\mathcal{F}}$ , lorsque  $\mathcal{F}$  parcourt l'ensemble des faces de  $\mathcal{P}$ , forme un éventail complet.

On notera par la suite  $\Delta_{\mathcal{P}}$  cet éventail, et  $X_{\mathcal{P}} = X(\Delta_{\mathcal{P}})$  la variété torique associée comme au paragraphe précédent.

**Exemple 4.1.9.** Par exemple considérons le polytope de  $\mathbb{R}^2$  suivant :



Les cônes  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  associés respectivement aux faces  $\{S_1\}$ ,  $\{S_2\}$  et  $\{S_3\}$  sont ceux représentés Figure 4.5. On reconnaît l'éventail associé à la variété  $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ .

Les cônes duaux et le polytope sont dans le même espace  $M$ . Les cônes duaux se décrivent facilement à partir de la géométrie du polytope. En effet, si  $\mathcal{F}$  est une face, le cône  $\sigma_{\mathcal{F}}^{\vee}$  est engendré par les vecteurs  $u' - u$ , où  $u'$  parcourt l'ensemble des sommets de  $\mathcal{P}$  et  $u$  l'ensemble des sommets de  $\mathcal{F}$  (voir Figure 4.5).

Dans l'exemple,

$$\begin{aligned}\sigma_1^{\vee} &= \langle S_3 - S_1, S_2 - S_1 \rangle \\ \sigma_2^{\vee} &= \langle S_3 - S_2, S_1 - S_2 \rangle \\ \sigma_3^{\vee} &= \langle S_1 - S_3, S_2 - S_3 \rangle\end{aligned}$$

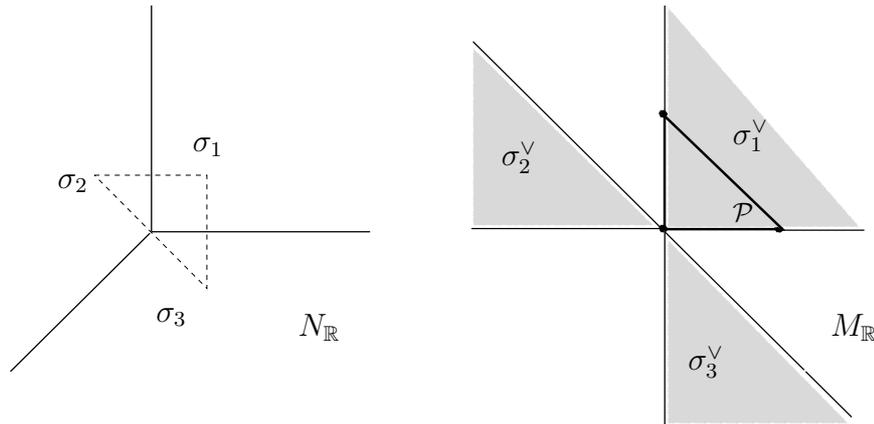


FIG. 4.5 – Eventail construit à partir d'un triangle

2°) La deuxième construction possible consiste à associer à  $\mathcal{P}$  une algèbre  $\mathbb{N}$ -graduée de type fini  $A_{\mathcal{P}}$  et à considérer la variété  $\text{Proj}(A_{\mathcal{P}})$  (voir par exemple [12]).

Posons :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_0 &:= \{0\} \\ \mathcal{P}_n &:= \underbrace{\mathcal{P} + \mathcal{P} + \cdots + \mathcal{P}}_{n \text{ fois}}, \quad n \in \mathbb{N} \\ P_n &:= \mathcal{P}_n \cap M\end{aligned}$$

On définit un semi-groupe dans  $\mathbb{N} \times M$  en posant :

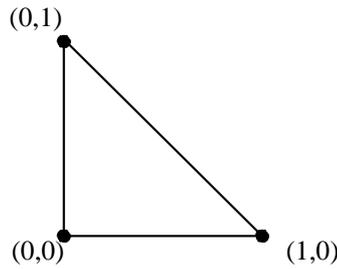
$$\Gamma := \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} n \times P_n$$

On considère l'algèbre de ce semi-groupe :

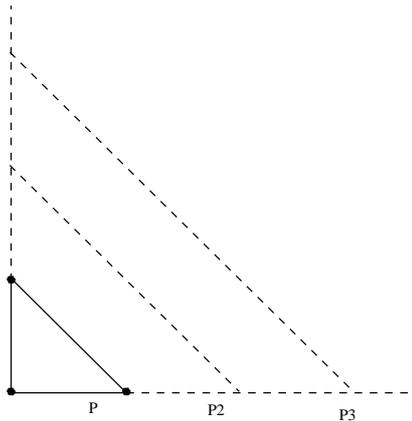
$$A_{\mathcal{P}} := \mathbb{C}\Gamma = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{C}e^{\gamma} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \left( \bigoplus_{u \in P_n} \mathbb{C}e^{(n,u)} \right) \quad (4.4)$$

L'espace  $\text{Proj}(A_{\mathcal{P}})$  est une variété torique (voir plus loin la proposition 4.1.11).

**Exemple 4.1.10.** On reprend l'exemple ci-dessus en partant du triangle :



La suite des polytopes itérés ressemble à :



Le semi-groupe  $\Gamma = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} n \times P_n$  associé est engendré par les vecteurs  $(1, 0, 0)$ ,  $(1, 1, 0)$  et  $(1, 0, 1)$  ; il est représenté Figure 4.1.10.

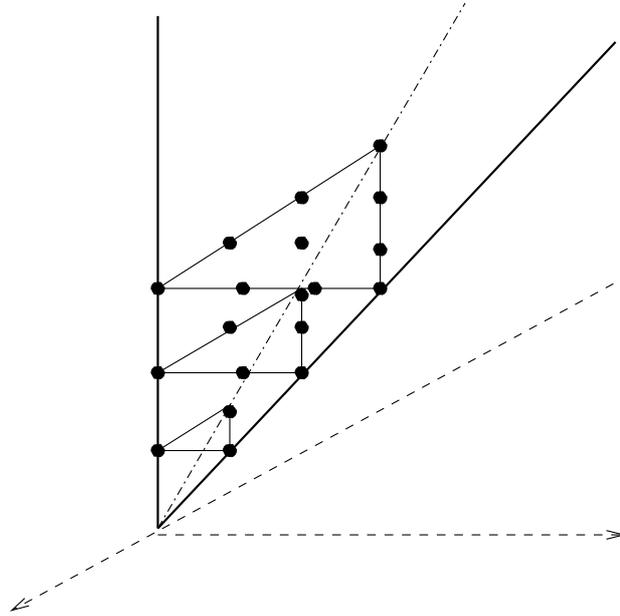
On pose  $e^{(1,0,0)} = X$ ,  $e^{(1,1,0)} = Y$  et  $e^{(1,0,1)} = Z$ , on a alors  $\mathbb{C}\Gamma = \mathbb{C}[X, Y, Z]$  et on obtient la variété torique  $\mathbb{P}_2 = \text{Proj}(\mathbb{C}[X, Y, Z])$ .

**Proposition 4.1.11.** Avec les notations ci-dessus :

$$\text{Proj}(A_{\mathcal{P}}) \simeq X_{\mathcal{P}}$$

**Preuve** — La preuve consiste à comparer les ouverts affines des deux variétés et les recollements entre eux. Tout d'abord décrivons les variétés ci-dessus :

-la variété  $X_{\mathcal{P}}$  est la réunion des ouverts affines toriques  $U_{\mathcal{F}}$ ,  $\mathcal{F}$  parcourant les faces de  $\mathcal{P}$ , recollés par  $U_{\mathcal{F}} \cap U_{\mathcal{F}'} = U_{\langle \mathcal{F}, \mathcal{F}' \rangle}$ , où  $\langle \mathcal{F}, \mathcal{F}' \rangle$  désigne la

FIG. 4.6 – Le semi-groupe  $\Gamma$  associé au triangle

plus petite face de  $\mathcal{P}$  contenant  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$ . Avec les notations, pour  $\mathcal{F}$  une face de  $\mathcal{P}$  :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\mathcal{F}} &:= \{v \in N_{\mathbb{R}} / \langle u' - u, v \rangle \geq 0, \forall u \in \mathcal{F}, u' \in \mathcal{P}\} \\
 \sigma_{\mathcal{F}}^{\vee} &:= \{u \in M_{\mathbb{R}} / \langle u, v \rangle \geq 0, \forall v \in \sigma_{\mathcal{F}}\} \\
 S_{\mathcal{F}} &:= \sigma_{\mathcal{F}}^{\vee} \cap M \\
 U_{\mathcal{F}} &:= \text{Spec}(\mathbb{C}S_{\mathcal{F}})
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

On rappelle que si  $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$  sont des faces de  $\mathcal{P}$ , alors  $\sigma_{\mathcal{G}}$  est une face de  $\sigma_{\mathcal{F}}$  et il y a une inclusion naturelle :

$$U_{\mathcal{G}} \hookrightarrow U_{\mathcal{F}}$$

Cette inclusion correspond au niveau des algèbres à l'identité :

$$\mathbb{C}S_{\mathcal{G}} = (\mathbb{C}S_{\mathcal{F}})_{e^u} = \text{le localisé de } \mathbb{C}S_{\mathcal{F}} \text{ en } e^u \tag{4.6}$$

où  $u$  est choisi dans  $M$  et dans l'intérieur relatif de  $\sigma_{\mathcal{F}}^{\vee} \cap \sigma_{\mathcal{G}}^{\perp}$ .

On peut décrire facilement le cône  $\sigma_{\mathcal{F}}^{\vee}$  et le semi-groupe  $S_{\mathcal{F}}$  à partir des sommets du polytope. On désigne par  $\Sigma(\mathcal{F})$ , resp.  $\Sigma(\mathcal{P})$  l'ensemble des sommets de  $\mathcal{F}$ , resp.  $\mathcal{P}$ .

**Lemme 4.1.12.** *Soit  $\mathcal{F}$  une face de  $\mathcal{P}$ ,*

- (i) *L'ensemble  $\gamma_{\mathcal{F}} := \{u' - u, u \in \Sigma(\mathcal{F}), u' \in \Sigma(\mathcal{P})\}$  est un ensemble de générateurs du cône  $\sigma_{\mathcal{F}}^{\vee}$ .*

(ii) Tout élément  $x \in S_{\mathcal{F}}$  s'écrit sous la forme :

$$x = \sum_{g \in \gamma_{\mathcal{F}}} \lambda_g g, \text{ avec les } \lambda_g \in \mathbb{Q}_{\geq 0} \text{ et } \left( \sum_j \lambda_g \right) \in \mathbb{N}$$

En effet, d'après les définitions (4.5), il est clair que le cône dual  $\sigma_{\mathcal{F}}^{\vee}$  est engendré par les vecteurs  $u' - u$ , où  $u'$  parcourt  $\mathcal{P}$  et  $u$  parcourt  $\mathcal{F}$ . Les polytopes  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{F}$  étant convexes, on peut restreindre  $u'$  et  $u$  à parcourir l'ensemble des sommets. En effet, notons  $\{u_i\}_i = \Sigma(\mathcal{F})$  et  $\{u'_j\}_j = \Sigma(\mathcal{P})$ . Si  $u \in \mathcal{F}$  et  $u' \in \mathcal{P}$ , alors par convexité on peut écrire :

$$u = \sum_i \alpha_i u_i, \sum_i \alpha_i = 1, \text{ et } u' = \sum_j \beta_j u'_j, \sum_j \beta_j = 1$$

D'où,  $u' - u = \sum_{i,j} \beta_j \alpha_i (u'_j - u_i)$ . Ce qui démontre le point (i) du lemme. On peut donc écrire tout élément de  $S_{\mathcal{F}}$  comme une combinaison linéaire à coefficients positifs de vecteurs dans  $\gamma_{\mathcal{F}}$ . Le fait qu'on peut choisir les coefficients rationnels provient de la rationalité du cône  $\sigma_{\mathcal{F}}^{\vee}$  par rapport au réseau  $M$ . Comme 0 appartient à  $\gamma_{\mathcal{F}}$ , on peut ajuster les coefficients de sorte que leur somme soit entière.

-la variété  $\text{Proj}(A_{\mathcal{P}})$  est la réunion d'ouverts affines standards  $D(f)$ ,  $f$  élément homogène dans  $A_{\mathcal{P}}$ , recollés naturellement par  $D(f) \cap D(f') = D(ff')$ . Avec les notations :

$$\begin{aligned} X &:= \text{Proj}(A_{\mathcal{P}}) = \{\text{idéaux maximaux homogènes de } A_{\mathcal{P}}\} \\ D(f) &:= \{\mathfrak{p} \in X / f \notin \mathfrak{p}\} \end{aligned}$$

On sait que :

$$D(f) \simeq \text{Spec}(A_{\langle f \rangle})$$

$$\text{où } A_{\langle f \rangle} = \left\{ \frac{a}{f^k}, k \in \mathbb{N}, a \in A_{\mathcal{P}}, \text{deg}(a) = k \text{deg}(f) \right\}.$$

Si  $f, g, h$  sont des éléments de  $A_{\mathcal{P}}$  tels que  $g = fh$ , alors il existe un élément  $\tilde{h}$  dans  $A_{\langle f \rangle}$  (par exemple  $\tilde{h} = h^{\text{deg}(f)} / f^{\text{deg}(h)}$ ) tel que :

$$A_{\langle g \rangle} = (A_{\langle f \rangle})_{\tilde{h}} = \text{le localisé de } A_{\langle f \rangle} \text{ en } \tilde{h} \tag{4.7}$$

Ce qui est la version algébrique de l'inclusion :

$$D(g) \hookrightarrow D(f)$$

Pour démontrer la proposition on procède en deux étapes :

1°) A toute face  $\mathcal{F}$  on associe un élément  $f_{\mathcal{F}}$  de  $A_{\mathcal{P}}$  tel que :

$$U_{\mathcal{F}} \simeq D(f_{\mathcal{F}})$$

2°) On montre que le diagramme suivant, avec les inclusions naturelles décrites ci-dessus, commute :

$$\begin{array}{ccc}
U_{\mathcal{G}} & \hookrightarrow & U_{\mathcal{F}} \\
|\wr & & |\wr \\
D(f_{\mathcal{G}}) & \hookrightarrow & D(f_{\mathcal{F}})
\end{array} \tag{4.8}$$

On traite le point 1) en version algébrique, c'est à dire on explicite un isomorphisme entre les algèbres  $\mathbb{C}S_{\mathcal{F}}$  et  $A_{\langle f_{\mathcal{F}} \rangle}$ , pour un  $f_{\mathcal{F}}$  bien choisi.

Soit  $\mathcal{F}$  une face de  $\mathcal{P}$  et  $\{u_1, \dots, u_r\} = \Sigma(\mathcal{F})$  l'ensemble de ses sommets. On pose (voir notation (4.4)) :

$$f_{\mathcal{F}} = e^{(r, u_1 + u_2 + \dots + u_r)} \in A_{\mathcal{P}} \tag{4.9}$$

Soit  $x \in S_{\mathcal{F}}$ , on commence par montrer qu'il existe  $k_x \in \mathbb{N}$  tel que  $x + k_x \sum_i u_i \in P_{k_x r}$  (voir Figure 4.7). Comme  $x \in \sigma_F^\vee$ , par le lemme 4.1.12, on peut écrire  $x = \sum \lambda_{(u', u)}(u' - u)$ , avec  $(\sum \lambda_{(u', u)}) \in \mathbb{N}$  et  $u' \in \Sigma(\mathcal{P})$ ,  $u \in \Sigma(\mathcal{F})$ . On note  $N$  le nombre de termes dans la somme  $x = \sum \lambda_{(u', u)}(u' - u)$  et on pose  $L = (\sum \lambda_{(u', u)})$ . On a :

$$u' - u + \sum_i u_i \in \mathcal{P}_r$$

car  $u$  est un certain  $u_i$ . Et par convexité, on a alors :

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\frac{\lambda_{(u', u)}}{L}(u' - u + \sum_i u_i) + (1 - \frac{\lambda_{(u', u)}}{L}) \sum_i u_i}_{= \frac{\lambda_{(u', u)}}{L}(u' - u) + \sum_i u_i} \in \mathcal{P}_r
\end{aligned}$$

En sommant selon la décomposition de  $x$ , on obtient :

$$\sum_{(u', u)} \underbrace{\left( \frac{\lambda_{(u', u)}}{L}(u' - u) + \sum_i u_i \right)}_{= \frac{1}{L}x + N \sum_i u_i} \in \mathcal{P}_{Nr}$$

En sommant  $L$  fois cet élément, on a alors :

$$x + (LN) \sum_i u_i \in \mathcal{P}_{LNr}$$

Puisque  $x$  et les  $u_i$  sont dans  $M$  on peut remplacer  $\mathcal{P}_{LNr}$  par  $P_{LNr}$ , et en posant  $k_x = LN$  on obtient :

$$x + k_x \sum_i u_i \in P_{k_x r}$$

Notons  $\gamma_x := x + k_x \sum_i u_i$ .

L'association :

$$e^x \longmapsto \frac{e^{(rk_x, \gamma_x)}}{f_{\mathcal{F}}^{k_x}} =: \varphi_{\mathcal{F}}(e^x) \tag{4.10}$$

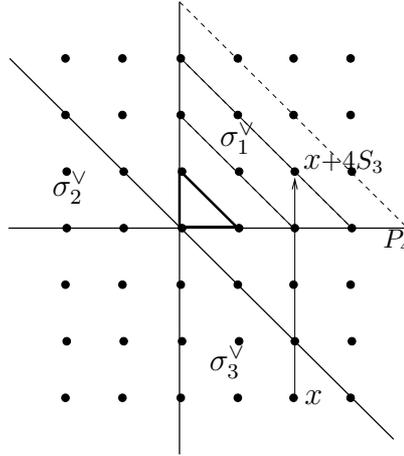


FIG. 4.7 –

permet de définir un isomorphisme d'algèbres  $\varphi_{\mathcal{F}}$  entre  $\mathbb{C}S_{\mathcal{F}}$  et  $A_{\langle f_{\mathcal{F}} \rangle}$ . En effet, on montre facilement que  $\varphi_{\mathcal{F}}(e^x)$  ne dépend pas des choix faits (choix de la décomposition  $x = \sum x_u$ , choix des  $k_u$ , ...) et que  $\varphi_{\mathcal{F}}$  est injective. Pour la surjectivité, prenons un élément  $\frac{e^{(kr, \gamma)}}{f_{\mathcal{F}}^k}$  dans  $A_{\langle f_{\mathcal{F}} \rangle}$ , c'est à dire qu'on a  $\gamma \in P_{kr}$ . On peut donc écrire :

$$\gamma = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^k \gamma_{i,j}, \text{ avec } \gamma_{i,j} \in P_1$$

et donc,

$$\gamma - k \sum_{i=1}^r u_i = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^k (\gamma_{i,j} - u_i)$$

D'après le lemme 4.1.12,  $(\gamma - k \sum_i u_i) \in \sigma_{\mathcal{F}}^{\vee}$ , et de plus il est clair que  $(\gamma - k \sum_i u_i) \in M$ . Donc finalement  $(\gamma - k \sum_i u_i) \in S_{\mathcal{F}}$ , et on vérifie que :

$$\varphi_{\mathcal{F}}(e^{\gamma - k \sum_i u_i}) = \frac{e^{(kr, \gamma)}}{f_{\mathcal{F}}^k} \quad (4.11)$$

A toute face  $\mathcal{F}$  on associe donc l'élément  $f_{\mathcal{F}}$  défini en (4.9) et l'application  $\varphi_{\mathcal{F}}$  définie par (4.10) qui donne un isomorphisme :

$$\varphi_{\mathcal{F}} : \mathbb{C}S_{\mathcal{F}} \xrightarrow{\sim} A_{\langle f_{\mathcal{F}} \rangle}$$

Ce qui conclut la première étape de la preuve.

Pour la deuxième étape, on fixe  $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$  deux faces de  $\mathcal{P}$ . On montre la commutativité du diagramme (4.8), en version algébrique. On note :

$$\begin{aligned} \bar{u} &:= u_1 + u_2 + \cdots + u_r = \sum_{u \in \Sigma(\mathcal{F})} u \\ \bar{t} &:= t_1 + t_2 + \cdots + t_s = \sum_{t \in \Sigma(\mathcal{G}) \setminus \Sigma(\mathcal{F})} t \end{aligned}$$

Par définition,

$$f_{\mathcal{G}} = e^{(r+s, \bar{u}+\bar{t})} = e^{(r, \bar{u})} e^{(s, \bar{t})} = f_{\mathcal{F}} e^{(s, \bar{t})}$$

d'où, d'après (4.7), l'inclusion  $D(f_{\mathcal{G}}) \hookrightarrow D(f_{\mathcal{F}})$  correspond à l'identité :

$$A_{\langle f_{\mathcal{G}} \rangle} = (A_{\langle f_{\mathcal{F}} \rangle})_{e^{r(s, \bar{t})}/e^{s(r, \bar{u})}}$$

D'après (4.11),  $\varphi_{\mathcal{F}}^{-1}(e^{r(s, \bar{t})}/e^{s(r, \bar{u})}) = e^{(r\bar{t}-s\bar{u})}$ , montrons que :

$$\mathbb{C}S_{\mathcal{G}} = (\mathbb{C}S_{\mathcal{F}})_{e^{(r\bar{t}-s\bar{u})}}$$

ou de manière équivalente, que :

$$S_{\mathcal{G}} = S_{\mathcal{F}} + \mathbb{Z}_{\geq 0}(s\bar{u} - r\bar{t})$$

Ceci a bien un sens car d'après le lemme 4.1.12,  $(r\bar{t} - s\bar{u}) \in S_{\mathcal{F}}$ .

Le vecteur  $s\bar{u} - r\bar{t}$  est une somme de  $rs$  termes du type  $u_i - t_j$  avec  $u_i \in \Sigma(\mathcal{P})$  et  $t_j \in \Sigma(\mathcal{G})$ , donc encore par le lemme 4.1.12 on a aussi :

$$s\bar{u} - r\bar{t} \in S_{\mathcal{G}}$$

Donc l'inclusion  $S_{\mathcal{G}} \supset S_{\mathcal{F}} + \mathbb{Z}_{\geq 0}(s\bar{u} - r\bar{t})$  est claire.

Réciproquement, soit  $x \in S_{\mathcal{G}}$ , on sait qu'on peut écrire :

$$x = \sum_{(u', t)} \lambda_{(u', t)} (u' - t) \text{ avec } u' \in \Sigma(\mathcal{P}), t \in \Sigma(\mathcal{G}) \text{ et } \sum_{(u', t)} \lambda_{(u', t)} = L \in \mathbb{N}.$$

Si  $t \in \Sigma(\mathcal{F})$ ,  $(u' - t) \in S_{\mathcal{F}}$  et  $(r\bar{t} - s\bar{u}) \in S_{\mathcal{F}}$  aussi, donc :

$$(u' - t) - (s\bar{u} - r\bar{t}) \in S_{\mathcal{F}}$$

Si  $t \in \Sigma(\mathcal{G}) \setminus \Sigma(\mathcal{F})$ , alors :

$$(u' - t) - (s\bar{u} - r\bar{t}) = \underbrace{u' + (r\bar{t} - t)}_{\text{somme de } rs \text{ éléments de } \Sigma(\mathcal{P})} - \underbrace{s\bar{u}}_{rs \text{ éléments de } \Sigma(\mathcal{F})}$$

Ainsi on a aussi,

$$(u' - t) - (s\bar{u} - r\bar{t}) \in S_{\mathcal{F}}$$

D'où,

$$x - L(s\bar{u} - r\bar{t}) = \sum_{(u', t)} \lambda_{(u', t)} ((u' - t) - (s\bar{u} - r\bar{t})) \in \sigma_{\mathcal{F}}^{\vee} \cap M = S_{\mathcal{F}}$$

et donc l'inclusion  $S_{\mathcal{G}} \subset S_{\mathcal{F}} + \mathbb{Z}_{\geq 0}(s\bar{u} - r\bar{t})$  est aussi vérifiée.

On a donc montré que les identités :

$$A_{\langle f_{\mathcal{G}} \rangle} = (A_{\langle f_{\mathcal{F}} \rangle})_{e^{r(s, \bar{t})}/e^{s(r, \bar{u})}} \quad \text{et} \quad \mathbb{C}S_{\mathcal{G}} = (\mathbb{C}S_{\mathcal{F}})_{e^{(r\bar{t}-s\bar{u})}}$$

sont les mêmes aux isomorphismes près et donc on en déduit la commutativité du diagramme (4.8).

Pour finir, on remarque que  $\text{Proj}(A_{\mathcal{P}})$  est recouvert par les  $D(f_S)$ , où  $S$  parcourt  $\Sigma(\mathcal{P})$  (ce qui découle du fait que tout élément de  $\mathcal{P}$  est un barycentre à poids rationnels positifs des sommets de  $\mathcal{P}$ ).

□

### 4.1.3 Exemples

Dans cette partie on donne des exemples de variétés toriques et des éventails associés.

Les exemples choisis sont des variétés de Schubert et des variétés de Richardson (voir §1.6) de dimension 2, dans le cas du groupe  $G = Sp_4(\mathbb{C})$ . On fixe dans  $G = Sp_4(\mathbb{C})$ , les sous-groupes usuels  $T \subset B$ , où  $T$  est un tore,  $B$  un sous-groupe de Borel. Dans les exemples que nous considérerons, les variétés seront toriques relativement à  $T$ .

Pour reconstituer l'éventail  $\Delta$  associé à la variété torique, on utilise l'action de  $T$  sur la variété. Tout d'abord on utilise les réseaux :

$$M = \text{Hom}(T, \mathbb{C}^*), \quad N = \text{Hom}(\mathbb{C}^*, T)$$

Grâce à la proposition 4.1.7, on a les correspondances suivantes :

$$\begin{aligned} \{\text{points fixes sous l'action de } T\} &\longleftrightarrow \{\text{cônes maximaux de } \Delta\} \\ \{\text{courbes } T\text{-stables}\} &\longleftrightarrow \{\text{arêtes des cônes de } \Delta\} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{vecteurs } T\text{-stables,} \\ \text{tangents en un point fixe} \end{array} \right\} &\longleftrightarrow \{\text{arêtes du cône dual}\} \end{aligned}$$

Il nous suffit donc de connaître les points fixes et les espaces tangents en les points fixes. Dans le cas des variétés de Schubert pour un groupe de Lie classique  $G$ , Lakshmibai a fait la description de ces espaces, [22], [23].

Nous allons utiliser ces résultats. Tout d'abord on introduit quelques notations.

$$\varphi_\tau := \tau B \in G/B, \quad \tau \in W$$

L'ensemble des points de  $G/B$  fixés par  $T$  est exactement  $\{\varphi_\tau, \tau \in W\}$ .

Désignons par  $T(w, \tau)$  l'espace tangent en  $\varphi_\tau$  à la variété de Schubert  $X_w$ ,  $w, \tau \in W$ ,  $\tau \leq w$ . Dans le cas où  $w = w_0$ , la variété de Schubert est la variété de drapeaux  $G/B$ , et on a :

$$T(w_0, \tau) = \bigoplus_{\beta \in \tau(R^+)} \mathfrak{g}_{-\beta}$$

où les  $\mathfrak{g}_{-\beta}$  sont les sous-espaces radiciels de  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$  (voir §1.1).

Posons  $N(w, \tau) := \{\beta \in \tau(R^+) / \mathfrak{g}_{-\beta} \subset T(w, \tau)\}$ , de sorte que :

$$T(w, \tau) = \bigoplus_{\beta \in N(w, \tau)} \mathfrak{g}_{-\beta}$$

Dans le cas qui nous intéresse, c'est à dire  $G = Sp_4(\mathbb{C})$ , on a la description suivante :

**Théoreme 4.1.13.** [23] Soit  $G = Sp_4(\mathbb{C})$ , fixons  $w, \tau \in W$ ,  $\tau \leq w$ , et  $\beta \in \tau(R^+)$ ; écrivons  $\beta = \tau(\alpha)$  avec  $\alpha \in R^+$ .

1. Cas  $\alpha = \alpha_1$  ou  $\alpha_2$  ou  $2\alpha_1 + \alpha_2$  :

$$\beta \in N(w, \tau) \iff w \geq s_\beta \tau$$

2. Cas  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$  :

(a)  $\tau > \tau s_\alpha \implies \beta \in N(w, \tau)$

(b)  $\tau s_\alpha > \tau > \tau s_{(2\alpha_1 + \alpha_2)}$  ou  $\tau s_{\alpha_2}$  :

$$\beta \in N(w, \tau) \iff w \geq s_\beta \tau$$

(c)  $\tau s_\alpha > \tau$  et  $\tau < \tau s_{(2\alpha_1 + \alpha_2)}$  et  $\tau < \tau s_{\alpha_2}$  :

i. Si  $\tau < \tau s_{\alpha_2}$  :  $\beta \in N(w, \tau) \iff w \geq s_\beta \tau$  ou  $\tau s_{(2\alpha_1 + \alpha_2)}$

ii. Si  $\tau > \tau s_{\alpha_2}$  :  $\beta \in N(w, \tau) \iff w \geq \tau s_{\alpha_2} s_{(2\alpha_1 + \alpha_2)}$

La figure 4.8 représente le système de racines ainsi que l'ordre de Bruhat sur le groupe de Weyl associés à  $G = Sp_4(\mathbb{C})$ .

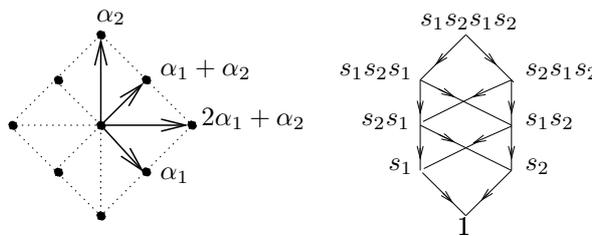


FIG. 4.8 – Système de racines et groupe de Weyl en type  $C_2$

**Exemple 4.1.14.** Exemple pour  $G = Sp_4(\mathbb{C})$  et  $X = X_{s_1 s_2}$ .

Dans ce cas,  $X$  est connue pour être une variété torique pour le tore  $T$  de  $G$ .

-quatre points fixes :  $\varphi_1, \varphi_{s_1}, \varphi_{s_2}, \varphi_{s_2 s_1}$ .

-quatre courbes  $T$ -stables : entre chaque paire de points fixes du type  $\{\varphi_\tau, \varphi_{s_\alpha \tau}\}$  (ici  $\alpha = \alpha_1$  ou  $\alpha_2$ ).

On en déduit que dans l'éventail associé il y a exactement 4 cônes de dimension 2 et 4 cônes de dimension 1.

La situation est représentée schématiquement figure 4.9.

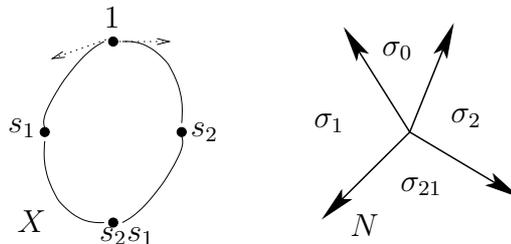


FIG. 4.9 – Schéma de  $X$  et de son éventail

On note  $\sigma_0$ , resp.  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{21}$  les cônes correspondants aux points fixes  $\varphi_1$ , resp.  $\varphi_{s_1}, \varphi_{s_2}, \varphi_{s_2s_1}$ .

En un point fixe  $\varphi_\tau$  partent deux courbes  $T$ -stables. Les vecteurs tangents à ces courbes au point fixe, sont  $T$ -stables. Les poids de ces vecteurs sont des éléments de  $M = \text{Hom}(T, \mathbb{C}^*)$  qui correspondent aux arêtes du cône dual  $\sigma_\tau^\vee$ . Ces poids sont exactement les éléments de l'ensemble  $N(s_2s_1, \tau)$  décrit ci-dessus.

Grâce au théorème 4.1.13, on détermine les ensembles  $N(s_2s_1, \tau)$ ,  $\tau \in \{1, s_1, s_2, s_2s_1\}$  :

$$\begin{aligned} N(s_2s_1, 1) &= \{\alpha_1, \alpha_2\}, & N(s_2s_1, s_1) &= \{-\alpha_1, \alpha_2\}, \\ N(s_2s_1, s_2) &= \{\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_2\}, & N(s_2s_1, s_2s_1) &= \{-\alpha_2, -\alpha_1 - \alpha_2\} \end{aligned}$$

On obtient alors les quatre cônes duaux  $\sigma_\tau^\vee$  :



On en déduit l'éventail pour  $X_{s_2s_1}$  ( Fig.4.10).

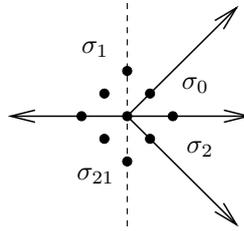


FIG. 4.10 – Eventail de  $X_{s_2s_1}$

**Exemple 4.1.15.** Exemple pour  $G = Sp_4(\mathbb{C})$  et  $X = X_{s_1s_2s_1} \cap X^{s_1s_2s_1}$ .

Pour alléger notons ici  $w = s_1s_2s_1$ . La dimension de  $X$  est 2. En effet :

$$\dim X \geq \dim X_w + \dim X^w - \dim G/B = 2$$

D'autre part,  $\dim X < 3$  car  $X_w \neq X^w$ . On sait que la variété  $X$  est torique pour le tore  $T$  de  $G$ . Les points fixes sont les  $\varphi_\tau$  pour  $w_0w \leq \tau \leq w$ .

-quatre points fixes :  $\varphi_{s_2}, \varphi_{s_1s_2}, \varphi_{s_2s_1}, \varphi_{s_1s_2s_1}$

-quatre courbes  $T$ -stables : entre chaque paire de points fixes du type  $\{\varphi_\tau, \varphi_{s_\alpha\tau}\}$  (ici  $\alpha = \alpha_1$  ou  $\alpha_1 + \alpha_2$ ).

Concernant la variété de Schubert opposée  $X^w$ , on note  $N^-(w, \tau)$  l'ensemble des poids des vecteurs  $T$  stables tangents à  $X^w$  en  $\varphi_\tau$ . On a :

$$N^-(w, \tau) = w_0(N(w, w_0\tau))$$

On détermine ces ensembles à l'aide du théorème 4.1.13. On obtient :

$$\begin{aligned}
N(w, s_2) &= \{\alpha_1, -\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2\}, \\
N(w, s_1 s_2) &= \{-2\alpha_1 - \alpha_2, -\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2\}, \\
N(w, s_2 s_1) &= \{\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_1 - \alpha_2\}, \\
N(w, s_1 s_2 s_1) &= \{-\alpha_1 - \alpha_2, -2\alpha_1 - \alpha_2, -\alpha_1\}, \\
N^-(w, s_1 s_2 s_1) &= \{-\alpha_1, \alpha_2, -\alpha_1 - \alpha_2\}, \\
N^-(w, s_2 s_1) &= \{2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1, -\alpha_1 - \alpha_2\}, \\
N^-(w, s_1 s_2) &= \{-\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2\}, \\
N^-(w, s_2) &= \{\alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1\}
\end{aligned}$$

L'ensemble  $N^-(w, \tau) \cap N(w, \tau)$  est l'ensemble des poids des vecteurs  $T$ -stables tangents à  $X$  au point  $\varphi_\tau$ .



On en déduit l'éventail pour  $X$  (voir Fig 4.11).

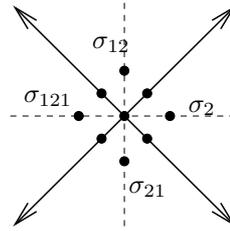


FIG. 4.11 – Eventail de  $X_{s_1 s_2 s_1}^{s_1 s_2 s_1}$

## 4.2 Dégénérescences toriques et semi-toriques

### 4.2.1 Le problème

On dit qu'une variété complexe projective  $X$  dégénère en une variété  $X_0$  s'il existe une variété  $\mathcal{X}$  et une fonction régulière  $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}$  telles que  $\pi^{-1}(z) \cong X$  pour tout  $z \in \mathbb{C}^*$  et  $\pi^{-1}(0) = X_0$ .

Lorsque la variété  $X_0$  est une variété torique, resp. semi-torique (c'est à dire union de composantes irréductibles toriques), on parle de dégénérescence torique, resp. semi-torique.

On peut construire des dégénérescences de la manière suivante : Notons  $R$  la  $\mathbb{C}$ -algèbre des coordonnées homogènes sur  $X$ . On munit  $R$  d'une filtration croissante (voir plus loin def. 4.2.1)  $(R_n)_{n \geq 0}$  et on note  $\text{Gr}R$  l'algèbre graduée associée. Considérons  $\mathcal{R} := \bigoplus_{n \geq 0} R_n t^n \subset R[t]$  où  $t$  est une

indéterminée sur  $R$ . On a :

$$\mathcal{R}/t\mathcal{R} \simeq \bigoplus_{n \geq 0} R_n/R_{n-1} \simeq \text{Gr}R, \quad \mathcal{R}/(t-z)\mathcal{R} \simeq R, \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

Ainsi, en posant  $\mathcal{X} := \text{Proj } \mathcal{R}$ ,  $\pi := t$  et  $X_0 := \text{Proj } \text{Gr}R$ , on a une dégénérescence de  $X$  en  $X_0$ .

Le problème qui nous intéresse est celui des dégénérescences toriques des variétés de drapeaux, variétés de Schubert, variétés de Richardson. On utilise la méthode ci-dessus. On est ramené à munir les algèbres de ces variétés de filtrations telles que le gradué associé est de type  $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$  pour un certain polytope  $\mathcal{P}$  (voir (4.4)), on sait alors que  $\text{Proj}(\mathcal{A}_{\mathcal{P}})$  est une variété torique. Dans certains cas on ne peut associer qu'une union de faces d'un polytope. On obtient dans ces cas des dégénérescences semi-toriques.

Les algèbres des variétés qu'on étudie sont compatibles avec la base canonique introduite au chapitre 3. Les paramétrisations de cette base vont jouer un rôle important pour construire les filtrations.

Tout d'abord rappelons la définition d'une filtration :

**Définition 4.2.1.** Soit  $R$  une  $\mathbb{C}$ -algèbre commutative, et  $(\mathcal{S}, \leq)$  un monoïde totalement ordonné. On suppose que l'élément neutre  $0$  de  $\mathcal{S}$  est le plus petit élément. Une  $\mathcal{S}$ -filtration croissante sur  $R$  est une suite de sous-espaces  $(R_s)_{s \in \mathcal{S}}$  telle que :

- $1 \in R_0$ ,
- $s \leq t \implies R_s \subset R_t$
- $R_s R_t \subset R_{s+t}$
- $R = \bigcup_{s \in \mathcal{S}} R_s$

L'algèbre graduée associée à une  $\mathcal{S}$ -filtration est définie par :

$$\text{Gr } R := \bigoplus_{s \in \mathcal{S}} \left( R_s / \sum_{t < s} R_t \right)$$

## 4.2.2 Cas de la variété de drapeaux

Considérons la variété de drapeaux  $G/B$  et notons  $R$  son algèbre de coordonnées homogènes.

Soit  $\lambda_0$  un poids régulier dominant et  $v_{-\lambda_0}$  le vecteur de plus haut poids du module  $V(-\lambda_0)$ . On note  $G \times_B \mathbb{C}v_{-\lambda_0}$  l'ensemble des classes d'équivalence dans  $G \times \mathbb{C}v_{-\lambda_0}$  modulo la relation :

$$(gb, zv_{-\lambda_0}) \sim (g, zb \cdot v_{-\lambda_0}), \quad \forall g \in G, b \in B, z \in \mathbb{C}$$

Notons  $\mathcal{L}_{-\lambda_0}$  le fibré en droite sur  $G/B$  associé.

Rappelons que par le théorème de Borel-Weil-Bott, on a un isomorphisme de  $G$ -module :

$$H^0(G/B, \mathcal{L}_{-\lambda_0}) = V(\lambda_0)^* \otimes v_{\lambda_0}$$

A toute  $\xi \otimes v_{\lambda_0}$  dans  $V(\lambda_0)^* \otimes v_{\lambda_0}$ , on associe une section  $s$  du fibré, en posant  $s(g) = \xi(gv_{\lambda_0})$ . On vérifie aisément que dans  $G \rtimes_B \mathbb{C}v_{-\lambda_0}$  on a  $(gb, s(gb)v_{-\lambda_0}) = (g, s(g)v_{-\lambda_0})$ , ainsi  $s$  est bien un élément de  $H^0(G/B, \mathcal{L}_{-\lambda_0})$ .

On a alors un isomorphisme de  $\mathbb{C}$ -algèbre :

$$R \simeq \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H^0(G/B, \mathcal{L}_{-\lambda_0}^{\otimes n}) = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{N} \cdot \lambda_0} V^*(\lambda) \otimes v_\lambda$$

où  $\mathbb{N} \cdot \lambda_0$  est le cône des multiples entiers de  $\lambda_0$ .

Rappelons que le produit sur  $\bigoplus_{\lambda \in \mathbb{N} \cdot \lambda_0} V^*(\lambda) \otimes v_\lambda$  est défini sur deux éléments homogènes  $\xi \otimes v_\lambda \in V^*(\lambda) \otimes v_\lambda$  et  $\xi' \otimes v_{\lambda'} \in V^*(\lambda') \otimes v_{\lambda'}$  par :

$$\xi\xi' \otimes v_{\lambda+\lambda'}$$

où  $\xi\xi'$  est le produit dans  $\bigoplus V^*(\lambda)$  défini au paragraphe 2.5.

A partir de maintenant, on fixe un poids régulier dominant  $\lambda_0 = \lambda_1\varpi_1 + \lambda_2\varpi_2 + \dots + \lambda_n\varpi_n$ . Par la suite on identifiera parfois les éléments de  $\mathbb{N} \cdot \lambda_0$  avec le  $n$ -uplet de ses coordonnées  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  dans la base des poids fondamentaux de sorte que l'ensemble  $\mathbb{N} \cdot \lambda_0$  est naturellement identifié à  $\mathbb{N}^n$ . On utilise les notations du paragraphe 2.5.

L'ensemble  $\{\xi_\lambda(b^*) \otimes v_\lambda, b \in \mathcal{B}(\lambda), \lambda \in \mathbb{N} \cdot \lambda_0\}$  est une base de  $R$  appelée *base canonique duale*. D'après la proposition 2.5.1, on a :

$$(\xi_\lambda(b^*) \otimes v_\lambda)(\xi_\mu(b'^*) \otimes v_\mu) = \xi_{\lambda+\mu}(b^*b'^*) \otimes v_{\lambda+\mu}$$

Etant donné un mot réduit  $\mathbf{i}$ , on paramètre un élément  $\xi_\lambda(b^*) \otimes v_\lambda$  de la base canonique duale de  $R$  par le  $(n+N)$ -uplet  $(\lambda, c_{\mathbf{i}}(b))$  et on introduit l'ensemble  $\Gamma_{\mathbf{i}} \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n+N}$  de tous les paramètres :

$$\Gamma_{\mathbf{i}} := \{(\lambda, c_{\mathbf{i}}(b)) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n+N}, \lambda \in \mathbb{N} \cdot \lambda_0, b \in \mathcal{B}(\lambda)\}$$

En conséquence du théorème 2.2.5, on a :

**Théorème 4.2.2.** [25] *L'ensemble  $\Gamma_{\mathbf{i}}$  est l'ensemble des points entiers d'un cône rationnel polyédrique convexe de  $\mathbb{R}_{\geq 0}^{n+N}$ .*

On utilisera la notation  $b_{\lambda,t}$ , où  $(\lambda, t) \in \Gamma_{\mathbf{i}}$ , pour désigner l'élément  $\xi_\lambda(b^*) \otimes v_\lambda$  de  $R$  tel que  $b \in \mathcal{B}(\lambda)$  et  $c_{\mathbf{i}}(b) = t$ .

La propriété suivante de multiplication de deux éléments de la base canonique est due à Ph. Caldero :

**Proposition 4.2.3.** [7] *Soient  $(\lambda, t)$  et  $(\lambda', t')$  dans  $\Gamma_{\mathbf{i}}$ , alors :*

$$b_{\lambda,t} b_{\lambda',t'} = b_{\lambda+\lambda',t+t'} + \sum_{s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N} d_{(\lambda,t),(\lambda',t')}^s b_{\lambda+\lambda',s}$$

avec  $d_{(\lambda,t),(\lambda',t')}^s \neq 0 \Rightarrow s \prec t + t'$ , où  $\prec$  est l'ordre lexicographique usuel de  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^N$ .

Utilisant cette propriété, on construit naturellement une  $\Gamma_{\mathbf{i}}$ -filtration de  $R$  en posant, pour tout  $(\lambda, t) \in \Gamma_{\mathbf{i}}$  :

$$\mathcal{C}_{\mathbf{i}}(\lambda, t) = \langle b_{\mu, s}, (\mu, s) \prec (\lambda, t) \rangle_{\mathbb{C}\text{-ev}} \subset R$$

Notons  $\text{Gr}_{(\Gamma_{\mathbf{i}})}R$  l'algèbre graduée associée à cette filtration, et notons  $\bar{b}_{\lambda, t}$  l'image d'un  $b_{\lambda, t}$  dans  $\text{Gr}R$ . Les éléments  $\bar{b}_{\lambda, t}$  satisfont

$$\bar{b}_{\lambda, t} \bar{b}_{\lambda', t'} = \bar{b}_{\lambda + \lambda', t + t'}$$

Alors, il est clair que  $\text{Gr}_{(\Gamma_{\mathbf{i}})}R = \bigoplus_{(\lambda, t) \in \Gamma_{\mathbf{i}}} \mathbb{C} \bar{b}_{\lambda, t} = \mathbb{C}[\Gamma_{\mathbf{i}}]$ .

Ceci ne répond pas exactement au problème de la dégénérescence torique. Il s'agit de transformer la  $\Gamma_{\mathbf{i}}$ -filtration de  $R$  en une  $\mathbb{N}$ -filtration. Pour cela on suit la méthode de [7], en introduisant une forme  $e : \mathbb{Z}_{\geq 0}^N \rightarrow \mathbb{N}$ .

D'après le théorème 4.2.2, le cône  $\Gamma_{\mathbf{i}}$  possède une présentation finie. Notons dans  $\Gamma_{\mathbf{i}}$  :

- les générateurs :  $(\lambda^i, t^i), i = 1 \dots \gamma,$
- les relations :  $\sum_i m_i^k (\lambda^i, t^i) - \sum_i n_i^k (\lambda^i, t^i) = 0, k = 1 \dots \rho,$

On obtient alors une présentation par générateurs et relations de  $\text{Gr}_{(\Gamma_{\mathbf{i}})}R$ . Notons dans  $\text{Gr}_{(\Gamma_{\mathbf{i}})}R$  :

- les générateurs :  $\bar{b}_i := \bar{b}_{\lambda^i, t^i}, i = 1 \dots \gamma,$
- les relations :  $\prod_i \bar{b}_i^{m_i^k} - \prod_i \bar{b}_i^{n_i^k} = 0, k = 1 \dots \rho,$

On peut relever ces générateurs et ces relations dans  $R$ . On obtient une présentation pour  $R$  :

- les générateurs :  $b_i := b_{\lambda^i, t^i}, i = 1 \dots \gamma,$
  - les relations :  $\prod_i b_i^{m_i^k} - \prod_i b_i^{n_i^k} = \sum_{p \in \mathcal{C}_k} c_p \prod_i b_i^{p_i}, k = 1 \dots \rho,$
- où les  $\mathcal{C}_k$  sont des parties finies de  $\mathbb{N}^\gamma$  telles que  $\forall p \in \mathcal{C}_k, \sum_i p_i t^i \prec \sum_i m_i^k t^i$ .

Notons  $\mathcal{S} := \cup_k \cup_{p \in \mathcal{C}_k} \{ \sum_i m_i^k t^i, \sum_i p_i t^i \}$ , c'est un sous-ensemble fini de  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^N$ .

**Lemme 4.2.4.** [7] Il existe une forme linéaire  $e : \mathbb{Z}_{\geq 0}^N \rightarrow \mathbb{N}$  vérifiant :  $\forall s, t \in \mathcal{S}, e(s) < e(t) \Leftrightarrow s \prec t$

Posons :

$$\mathcal{F}_{\mathbf{i}, m} := \langle \prod_i b_i^{s_i}, e(\sum_i s_i t^i) \leq m \rangle, m \in \mathbb{N}. \quad (4.12)$$

On en déduit :

**Théorème 4.2.5.** [7] La suite  $(\mathcal{F}_{\mathbf{i}, m})_{m \in \mathbb{N}}$  forme une  $\mathbb{N}$ -filtration de  $R$  dont l'algèbre graduée associée  $\text{Gr}R$  est isomorphe à  $\mathbb{C}[\Gamma_{\mathbf{i}}]$ .

### 4.2.3 Variété de Schubert

Considérons la décomposition cellulaire de Bruhat et son opposée :

$$G/B = \bigcup_{w \in W} BwB/B = \bigcup_{\tau \in W} B^{-}\tau B/B$$

La fermeture d'une cellule  $X_w := \overline{BwB/B}$ ,  $w \in W$ , dans  $G/B$ , est appelée *variété de Schubert*. Il est connu que  $\dim(X_w) = \ell(w)$ .

Désignons par  $X^\tau := w_0(X_\tau) = \overline{B^{-}w_0\tau B/B}$ ,  $\tau \in W$ , les *variétés de Schubert opposées*. Notons que  $G/B = X_{w_0} = X^{w_0}$ .

Pour la suite on fixe deux éléments  $w$  et  $\tau$  dans  $W$ .

L'algèbre  $R_w$  associée à  $X_w$  est un quotient de  $R$  par l'idéal  $I_w$  définissant  $X_w$ .

On utilise les notations de la section précédente; on fixe un poids dominant régulier  $\lambda_0$  et on considère le fibré en droite  $\mathcal{L}_{-\lambda_0}$  sur  $G/B$  associé. On rappelle que :

$$R_w = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{N} \cdot \lambda_0} V_w(\lambda)^* \otimes v_\lambda$$

Autrement dit :

$$I_w = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{N} \cdot \lambda_0} V_w(\lambda)^\perp \otimes v_\lambda,$$

où  $V_w(\lambda)^\perp$  est l'orthogonal de  $V_w(\lambda)$  dans  $V(\lambda)^*$ .

D'après le théorème 2.3.2 l'idéal  $I_w$  est compatible avec la base canonique duale de  $R$ . Plus précisément, l'ensemble  $\{\xi_\lambda(b^*) \otimes v_\lambda, \lambda \in \mathbb{N} \cdot \lambda_0, b \notin \mathcal{B}_w(\lambda)\}$  est une base de  $I_w$ .

Notons  $\pi_w$  la projection canonique de  $R$  sur  $R/I_w = R_w$ . L'ensemble  $\{\pi_w(\xi_\lambda(b^*) \otimes v_\lambda), b \in \mathcal{B}_w(\lambda), \lambda \in \mathbb{N} \cdot \lambda_0\}$  est une base de  $R_w$ .

Soit  $\mathbf{i}$  un mot réduit, on pose :

$$\Gamma_{\mathbf{i}}^w := \{(\lambda, c_{\mathbf{i}}(b)) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n+N}, \lambda \in \mathbb{N} \cdot \lambda_0, b \in \mathcal{B}_w(\lambda)\}$$

L'ensemble  $\Gamma_{\mathbf{i}}^w$  paramètre la base ci-dessus de  $R_w$ .

On rappelle qu'un mot réduit  $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_N)$  pour  $w_0$  est dit *adapté* à  $w$  si  $w = s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_p}$  est une décomposition réduite de  $w$ .

**Théorème 4.2.6.** [25] *Si  $\mathbf{i}$  est adapté à  $w$  alors  $\Gamma_{\mathbf{i}}^w$  est une face du cône  $\Gamma_{\mathbf{i}}$  de dimension  $p := \ell(w)$ . De plus,  $\Gamma_{\mathbf{i}}^w = \Gamma_{\mathbf{i}} \cap (\mathbb{Z}_{\geq 0}^{n+p} \times \{0\}^{N-p})$ .*

*En particulier,  $\Gamma_{\mathbf{i}}^w$  est l'ensemble des points entiers d'un cône rationnel convexe polyédrique de  $\mathbb{R}^{n+N}$ .*

On fixe  $\mathbf{i}$  un mot réduit et on utilise la filtration  $\mathcal{F}_{\mathbf{i}}$  construite en (4.12).

Cette filtration induit par restriction une filtration sur  $I_w$ . L'algèbre graduée associée  $\text{Gr}I_w = \langle \bar{b}_{\lambda,t}, (\lambda, t) \notin \Gamma_{\mathbf{i}}^w \rangle$  est un idéal de  $\text{Gr}R$ .

D'autre part la filtration  $\mathcal{F}_{\mathbf{i}}$  induit par la projection  $\pi_w$  une filtration sur  $R_w$ , dont l'algèbre graduée associée est :

$$\text{Gr}R_w = \text{Gr}R/\text{Gr}I_w = \langle \bar{b}_{\lambda,t}, (\lambda, t) \in \Gamma_{\mathbf{i}}^w \rangle$$

Dans le cas où  $\mathbf{i}$  a été choisi adapté à  $w$ , on a alors :

$$\mathrm{Gr}R_w = \mathbb{C}[\Gamma_{\mathbf{i}}^w]$$

Ce qui permet de construire des dégénérescences toriques des variétés de Schubert.

Dans le cas où  $\mathbf{i}$  n'est pas adapté à  $w$ , on verra au paragraphe suivant que  $\Gamma_{\mathbf{i}}^w$  est une union de faces de  $\Gamma_{\mathbf{i}}$ . On obtiendra alors des dégénérescences semi-toriques de la variété  $X_w$ .

Concernant la variété de Schubert opposée  $X^\tau$ , on désigne par  $R^\tau$  l'algèbre des coordonnées homogènes associée ; c'est un quotient de l'algèbre  $R$  par un certain idéal  $I^\tau$ . Ces algèbres se déduisent des algèbres  $R_\tau$  et  $I_\tau$  correspondant à la variété de Schubert  $X_\tau$ , en faisant agir l'élément  $w_0$  (car ce dernier change  $B$  en  $B^-$ ). Rappelons que l'action de  $w_0$  sur les modules  $V(\lambda)^*$  est proportionnelle à l'application  $\eta_\lambda$  définie au §3.3.2. Ainsi on a :

$$\begin{aligned} I^\tau &= w_0(I_\tau) = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{N} \cdot \lambda_0} \eta_\lambda(V_\tau(\lambda))^\perp \otimes v_\lambda \\ R^\tau &= w_0(R_\tau) = R/w_0(I_\tau) = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{N} \cdot \lambda_0} \eta_\lambda(V_\tau(\lambda))^* \otimes v_\lambda \end{aligned}$$

L'idéal  $I^\tau$  est compatible avec la base canonique de  $R$ , car  $I_\tau$  et l'application  $\eta_\lambda$  le sont.

$$I^\tau = \langle \xi_\lambda(b^*) \otimes v_\lambda, \lambda \in \mathbb{N} \cdot \lambda_0, b \notin \eta_\lambda(\mathcal{B}_\tau(\lambda)) \rangle$$

Notons  $\pi^\tau$  la projection canonique de  $R$  sur  $R/I^\tau$ . Les éléments  $\{\pi^\tau(\xi_\lambda(\eta_\lambda(b)^*)) \otimes v_\lambda\}$ , where  $\lambda \in \mathbb{N} \cdot \lambda_0, b \in \mathcal{B}_\tau(\lambda)$  forment une base de  $R^\tau$ . On les paramètre par les  $(n+N)$ -uplets de l'ensemble :

$$\tilde{\Gamma}_{\mathbf{i}}^\tau := \{(\lambda, c_{\mathbf{i}}(b)) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n+N}, \lambda \in \mathbb{N} \cdot \lambda_0, b \in \eta_\lambda(\mathcal{B}_\tau(\lambda))\}$$

On montre dans le paragraphe suivant que  $\tilde{\Gamma}_{\mathbf{i}}^\tau$  est une union de faces de  $\Gamma_{\mathbf{i}}$ .

#### 4.2.4 Variétés de Richardson

Plus généralement, considérons les variétés  $X_w^\tau := X_w \cap X^\tau$ ,  $w, \tau \in W$ , appelées variétés de Richardson. Puisque  $G/B = X_{w_0} = X^{w_0}$ , les variétés de Schubert, resp. variétés de Schubert opposées, sont des cas particuliers correspondant à  $\tau = w_0$ , resp.  $w = w_0$ .

Rappelons que si  $\ell(w) + \ell(\tau) < N$  alors l'intersection  $X_w^\tau$  est vide, sinon  $\dim(X_w^\tau) = \ell(w) + \ell(\tau) - N$ .

Pour la suite, on fixe  $w$  et  $\tau$  dans  $W$  tels que  $X_w^\tau \neq \emptyset$ , et on fixe un mot réduit quelconque  $\mathbf{i}$ .

Notons :

$$I_w^\tau := I_w + I^\tau, \quad R_w^\tau := R/I_w^\tau$$

L'algèbre  $R_w^\tau$  est l'algèbre des coordonnées homogènes correspondant à la variété de Richardson  $X_w^\tau$ .

L'idéal  $I_w^\tau$  a pour base  $\{\xi_\lambda(b^*) \otimes v_\lambda, \lambda \in \mathbb{N}.\lambda_0, b \notin \eta_\lambda(\mathcal{B}_\tau(\lambda)) \cap \mathcal{B}_w(\lambda)\}$ .

On paramètre les éléments de cette base par les  $(n + N)$ -uplets de l'ensemble :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathbf{i}}^{w,\tau} &:= \Gamma_{\mathbf{i}}^w \cap \tilde{\Gamma}_{\mathbf{i}}^\tau \\ &= \{(\lambda, c_{\mathbf{i}}(b)) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n+N}, \lambda \in \mathbb{N}.\lambda_0, b \in \eta_\lambda(\mathcal{B}_\tau(\lambda)) \cap \mathcal{B}_w(\lambda)\} \end{aligned}$$

Ainsi,  $I_w^\tau = \langle b_{(\lambda,t)}, (\lambda,t) \notin \Gamma_{\mathbf{i}}^{w,\tau} \rangle$ .

Notons  $\pi_w^\tau$  la projection canonique de  $R$  sur  $R_w^\tau = R/I_w^\tau$ . Alors  $R_w^\tau$  a pour base :

$$\begin{aligned} &\{\pi_w^\tau(\xi_\lambda(b^*) \otimes v_\lambda), \lambda \in \mathbb{N}.\lambda_0, b \in \eta_\lambda(\mathcal{B}_\tau(\lambda)) \cap \mathcal{B}_w(\lambda)\} \\ &= \{\pi_w^\tau(b_{(\lambda,t)}), (\lambda,t) \in \Gamma_{\mathbf{i}}^{w,\tau}\} \end{aligned}$$

On fixe un mot réduit quelconque  $\mathbf{i}$ . On utilise à nouveau la filtration  $\mathcal{F}_{\mathbf{i}}$  de  $R$ , construite en (4.12).

La filtration  $\mathcal{F}_{\mathbf{i}}$  induit, par restriction, une filtration sur l'idéal  $I_w^\tau$  telle que le gradué associé  $\text{Gr}I_w^\tau \simeq \langle \bar{b}_{(\lambda,t)}, (\lambda,t) \notin \Gamma_{\mathbf{i}}^{w,\tau} \rangle$  est un idéal de  $\text{Gr}R$ .

D'autre part,  $\mathcal{F}_{\mathbf{i}}$  induit également, par la projection  $\pi_w^\tau$ , une filtration sur  $R_w^\tau$  telle que :

$$\text{Gr}R_w^\tau \simeq \text{Gr}R/\text{Gr}I_w^\tau$$

L'algèbre  $\text{Gr}R_w^\tau$  a pour base :

$$\{\bar{b}_{(\lambda,t)}, (\lambda,t) \in \Gamma_{\mathbf{i}}^{w,\tau}\}$$

On construit une filtration  $\mathcal{F}_{\mathbf{i}}^{w,\tau}$  de  $R_w^\tau$  en utilisant la filtration  $\mathcal{F}_{\mathbf{i}}$  de  $R$ , en posant  $\mathcal{F}_{\mathbf{i},m}^{w,\tau} = \mathcal{F}_{\mathbf{i},m} + I_w^\tau$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . L'algèbre graduée associée  $\text{Gr}R_w^\tau$  est le quotient suivant :  $\text{Gr}R_w^\tau = \text{Gr}R/\text{Gr}I_w^\tau$ . L'idéal  $\text{Gr}I_w^\tau$  de  $\text{Gr}R$  est engendré par  $\{\bar{b}_{(\lambda,t)}, (\lambda,t) \notin \Gamma_{\mathbf{i}}^{w,\tau}\}$ .

**Proposition 4.2.7.** *L'ensemble  $\Gamma_{\mathbf{i}}^{w,\tau}$  est une union de faces de  $\Gamma_{\mathbf{i}}$ .*

Cette proposition se déduit du lemme suivant :

**Lemme 4.2.8.** *Soit  $\Gamma_{\mathbb{R}}$  un cône rationnel convexe polyédrique de  $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$  et soit  $\Gamma'_{\mathbb{R}}$  un sous-ensemble de  $\Gamma_{\mathbb{R}}$ . Considérons  $\Gamma := \Gamma_{\mathbb{R}} \cap \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  et  $\Gamma' := \Gamma'_{\mathbb{R}} \cap \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ . Si  $\Gamma'$  satisfait les conditions suivantes :*

- (a) *pour tout  $\gamma \in \Gamma$  et  $\delta \notin \Gamma'$ , on a  $\gamma + \delta \notin \Gamma'$ ,*
  - (b) *pour tout  $\gamma \in \Gamma'$  et  $m \in \mathbb{N}$ , on a  $m\gamma \in \Gamma'$ ,*
- alors  $\Gamma'$  est une réunion de faces de  $\Gamma$ .*

**Preuve** — Soit  $\gamma \in \Gamma'$  et  $\Phi_{\mathbb{R}}$  une face de  $\Gamma_{\mathbb{R}}$  (eventuellement  $\Phi_{\mathbb{R}} = \Gamma_{\mathbb{R}}$  tout entier) tels que  $\gamma$  est dans l'intérieur relatif de  $\Phi_{\mathbb{R}}$ .

Il suffit de montrer que tout élément de  $\Phi := \Phi_{\mathbb{R}} \cap \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  appartient à  $\Gamma'$ , car alors on aura bien  $\Gamma' = \bigcup_{\gamma \in \Gamma'} \Phi(\gamma)$ .

Prenons  $\delta \in \Phi$ , et montrons que  $\delta \in \Gamma'$ . Puisque  $\gamma$  appartient à l'intérieur de  $\Phi_{\mathbb{R}}$ , il existe un entier  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $\gamma - \frac{1}{m}\delta$  soit un élément de  $\Phi_{\mathbb{R}}$ . Ainsi, l'élément  $\gamma' := m\gamma - \delta$  appartient à  $\Phi_{\mathbb{R}} \cap \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ , et par conséquent  $\gamma' \in \Gamma$ . Par l'absurde, si  $\delta \notin \Gamma'$  alors par la condition (a) on aura  $\gamma' + \delta \notin \Gamma'$ , mais par la condition (b) on aura aussi  $\gamma' + \delta = m\gamma \in \Gamma'$ . On en déduit que nécessairement  $\delta \in \Gamma'$ . Ce qui prouve le lemme 4.2.8.  $\square$

**Preuve de la proposition 4.2.7** Appliquons le lemme 4.2.8 à  $\Gamma = \Gamma_{\mathbf{i}}$  et  $\Gamma' = \Gamma_{\mathbf{i}}^{w,\tau}$ . En tenant compte du fait que  $\text{Gr}I_w^{\tau} = \langle \bar{b}_{\lambda,t}, (\lambda, t) \notin \Gamma_{\mathbf{i}}^{w,\tau} \rangle$  est un idéal de  $\text{Gr}R$ , on en déduit facilement que  $\Gamma_{\mathbf{i}}^{w,\tau}$  satisfait à la condition (a) du lemme.

Montrons que la condition (b) est aussi satisfaite. Pour cela, fixons  $(\lambda, t) \in \Gamma_{\mathbf{i}}^{w,\tau}$  et  $m \in \mathbb{N}$ , et montrons que  $(m\lambda, mt) \in \Gamma_{\mathbf{i}}^{w,\tau}$ .

Tout d'abord on peut choisir  $\mathbf{i}'$  adapté à  $w$  et utiliser l'application de changement de paramètres  $R_{-\mathbf{i}'}^{-\mathbf{i}'}$  =  $c_{\mathbf{i}'}(c_{\mathbf{i}'})^{-1}$ . On a  $(\lambda, t) \in \Gamma_{\mathbf{i}}^w$ , d'où  $(\lambda, R_{-\mathbf{i}'}^{-\mathbf{i}'} t) \in \Gamma_{\mathbf{i}'}^w$ . D'une part, comme conséquence du théorème 3.2.2 l'application de changement de paramètres vérifie  $R_{-\mathbf{i}'}^{-\mathbf{i}'}(mt) = mR_{-\mathbf{i}'}^{-\mathbf{i}'}(t)$ . D'autre part,  $\Gamma_{\mathbf{i}'}^w$  est un cône d'après le théorème 4.2.2. Ainsi, on a  $(m\lambda, R_{-\mathbf{i}'}^{-\mathbf{i}'}(mt)) \in \Gamma_{\mathbf{i}'}^w$ . D'où en utilisant l'application réciproque  $R_{-\mathbf{i}'}^{-\mathbf{i}'}$ , on en déduit que  $(m\lambda, mt) \in \Gamma_{\mathbf{i}}^w$ .

Ensuite on peut choisir  $\mathbf{i}''$  adapté à  $\tau$  et utiliser  $R_{-\mathbf{i}''}^{(\mathbf{i}'')^*} = b_{(\mathbf{i}'')^*}^{-1} \circ c_{\mathbf{i}''}^{-1}$ . Puisqu'en particulier  $(\lambda, t) \in \tilde{\Gamma}_{\mathbf{i}''}^{\tau}$ , il existe  $b \in \mathcal{B}_{\tau}(\lambda)$  tel que  $(\lambda, t) = (\lambda, c_{\mathbf{i}''}\eta_{\lambda}(b))$ . Ainsi,

$$(\lambda, R_{-\mathbf{i}''}^{(\mathbf{i}'')^*} t) = (\lambda, b_{(\mathbf{i}'')^*}^{-1} \eta_{\lambda}(b)) = \Omega_{\mathbf{i}''}(\lambda, c_{\mathbf{i}''}(b))$$

où  $\Omega_{\mathbf{i}''}$  est l'application définie au paragraphe 3.4.2. On a donc :

$$(\lambda, R_{-\mathbf{i}''}^{(\mathbf{i}'')^*} t) \in \Omega_{\mathbf{i}''} \Gamma_{\mathbf{i}''}^{\tau}$$

Et comme  $\Omega_{\mathbf{i}''}$  est linéaire et que  $\Gamma_{\mathbf{i}''}^{\tau}$  est un cône, on en déduit :

$$(m\lambda, mR_{-\mathbf{i}''}^{(\mathbf{i}'')^*} t) \in \Omega_{\mathbf{i}''} \Gamma_{\mathbf{i}''}^{\tau}$$

Comme précédemment, par le théorème 3.2.5 on sait que  $mR_{-\mathbf{i}''}^{(\mathbf{i}'')^*} t = R_{-\mathbf{i}''}^{(\mathbf{i}'')^*}(mt)$ . Ainsi il existe  $b' \in \mathcal{B}_{\tau}(m\lambda)$  tel que :

$$(m\lambda, R_{-\mathbf{i}''}^{(\mathbf{i}'')^*}(mt)) = \Omega_{\mathbf{i}''}(m\lambda, c_{\mathbf{i}''}(b'))$$

Autrement dit, on a :

$$(m\lambda, b_{(\mathbf{i}'')^*}^{-1} \circ c_{\mathbf{i}''}^{-1}(mt)) = (m\lambda, b_{(\mathbf{i}'')^*}^{-1} \eta_{m\lambda}(b'))$$

D'où  $(m\lambda, mt) = (m\lambda, c_{\mathbf{i}''}\eta_{m\lambda}(b')) \in \tilde{\Gamma}_{\mathbf{i}''}^{\tau}$ .

Au final on a bien  $(m\lambda, mt) \in \Gamma_{\mathbf{i}}^w \cap \tilde{\Gamma}_{\mathbf{i}}^\tau = \Gamma_{\mathbf{i}}^{w,\tau}$ , ce qui montre que la condition (b) du lemme 4.2.8 est aussi satisfaite.

En appliquant alors le lemme on obtient la proposition voulue, que  $\Gamma_{\mathbf{i}}^{w,\tau}$  est une union de faces de  $\Gamma_{\mathbf{i}}$ .

□

On peut maintenant prouver le résultat principal de ce chapitre :

**Théorème 4.2.9.** *Toute variété de Richardson  $X_w^\tau$  dégénère en variété semi-torique dont les composantes irréductibles toriques sont données par des faces de  $\Gamma_{\mathbf{i}}^{w,\tau}$ .*

**Preuve** — Par la proposition 4.2.7, il existe des faces  $\Gamma_{\mathbf{i}}$ , notées  $\Phi_{\mathbf{i}}^k$ ,  $k = 1 \cdots r$ , telles que  $\Gamma_{\mathbf{i}}^{w,\tau} = \bigcup \Phi_{\mathbf{i}}^k$ . On suppose cette décomposition minimale, i.e. aucune face n'est contenue dans une autre.

On peut alors écrire  $\text{Gr}I_w^\tau = \langle \bar{b}_{\lambda,t}, (\lambda, t) \notin \cup_k \Phi_{\mathbf{i}}^k \rangle = \cap_k \langle \bar{b}_{\lambda,t}, (\lambda, t) \notin \Phi_{\mathbf{i}}^k \rangle$ . Les espaces  $\mathcal{I}_{\mathbf{i}}^k := \langle \bar{b}_{\lambda,t}, (\lambda, t) \notin \Phi_{\mathbf{i}}^k \rangle$  sont des idéaux premiers de  $\text{Gr}R = \langle \bar{b}_{\lambda,t}, (\lambda, t) \in \Gamma_{\mathbf{i}} \rangle$  car  $\Phi_{\mathbf{i}}^k$  sont des faces de  $\Gamma_{\mathbf{i}}$ . Les algèbres  $\text{Gr}R/\mathcal{I}_{\mathbf{i}}^k = \mathbb{C}[\Phi_{\mathbf{i}}^k]$  donnent des variétés toriques qui sont les composantes irréductibles de la variété associée à  $\text{Gr}R_w^\tau$ .

□

#### 4.2.5 Cas particulier de dégénérescences toriques

Dans le cas où  $G = SL_n$ , on peut construire des dégénérescences toriques d'une variété de Richardson  $X_w^\tau$  pour un bon choix des éléments  $(w, \tau)$ .

**Proposition 4.2.10.** *On fixe  $\mathbf{i} = (1, 2, 1, \dots, n, n-1, \dots, 2, 1)$  le mot réduit standard. Soit  $w, \tau \in W$  tels que  $\mathbf{i}$  est adapté à  $w$  et  $\mathbf{i}^*$  adapté à  $\tau$ . Alors  $\Gamma_{\mathbf{i}}^{w,\tau}$  est au plus une face de  $\Gamma_{\mathbf{i}}$ .*

**Preuve** — Dans le cas où  $\mathbf{i}$  est le mot réduit standard, l'application  $R_{\mathbf{i}}^{-\mathbf{i}}$  est linéaire d'après le corollaire 2.3.14. L'application  $\Omega_{\mathbf{i}^*}$  est toujours linéaire d'après sa définition §3.4.2. Par le théorème 4.2.6 on sait que  $\Gamma_{\mathbf{i}^*}^\tau$  est une face de  $\Gamma_{\mathbf{i}^*}$ , ainsi  $\tilde{\Gamma}_{\mathbf{i}}^\tau = (id \times R_{\mathbf{i}}^{-\mathbf{i}})\Omega_{\mathbf{i}^*}(\Gamma_{\mathbf{i}^*}^\tau)$  est encore une face de  $\Gamma_{\mathbf{i}}$ . Ainsi,  $\Gamma_{\mathbf{i}}^{w,\tau} := \Gamma_{\mathbf{i}}^w \cap \tilde{\Gamma}_{\mathbf{i}}^\tau$  est au plus une face de  $\Gamma_{\mathbf{i}}$ .

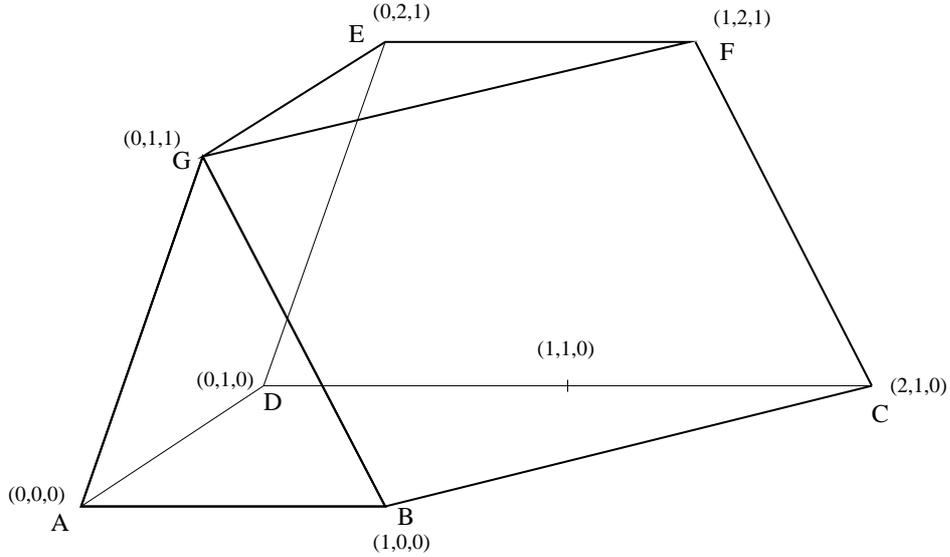
□

#### 4.2.6 Exemple dans le cas $A_2$

On étudie ici le cas  $G = SL_3$ . On fixe  $\lambda_0 = \varpi_1 + \varpi_2$  et  $\mathbf{i} = (1, 2, 1)$ .

La figure 4.12 représente le polytope  $\mathcal{C}_1(\lambda_0)$  des paramètres en cordes de la base canonique  $\mathcal{B}(\varpi_1 + \varpi_2)$ . Le cône  $\Gamma_{\mathbf{i}}$  est le cône sur ce polytope. La variété de drapeaux  $G/B$  dégénère en la variété torique associée à ce polytope.

Etant donné  $w, \tau$  dans  $W$ , on désigne par  $\mathcal{C}_{\mathbf{i}}^{w,\tau}(\lambda_0) := \lambda_0 \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^N \cap \Gamma_{\mathbf{i}}^{w,\tau}$  l'ensemble des paramètres en cordes des éléments de la base appartenant à

FIG. 4.12 – Polytope  $c_1(\mathcal{B}(\varpi_1 + \varpi_2))$ 

$\eta_{\lambda_0}(\mathcal{B}_\tau(\lambda_0)) \cap \mathcal{B}_w(\lambda_0)$ . Par le théorème 4.2.9,  $\mathcal{C}_i^{w,\tau}(\lambda_0)$  est une face ou une union de faces (voir Fig.4.13 pour les différents cas) de  $\mathcal{C}_i(\lambda_0)$ , correspondant à la dégénérescence torique ou semi-torique de la sous-variété  $X_w^\tau$ . Certaines des variétés  $X_w^\tau$  sont déjà toriques, leur dégénérescence est triviale.

Décrivons ce polytope plus en détail :

Les sommets A, B, C, D, E, F du polytope correspondent aux points  $T$ -fixes  $wB/B$  de  $G/B$ , pour respectivement  $w = id, s_1, s_1s_2, s_2, s_2s_1, s_1s_2s_1$ . On peut remarquer qu'il y a un sommet supplémentaire, G, résultant de la dégénérescence.

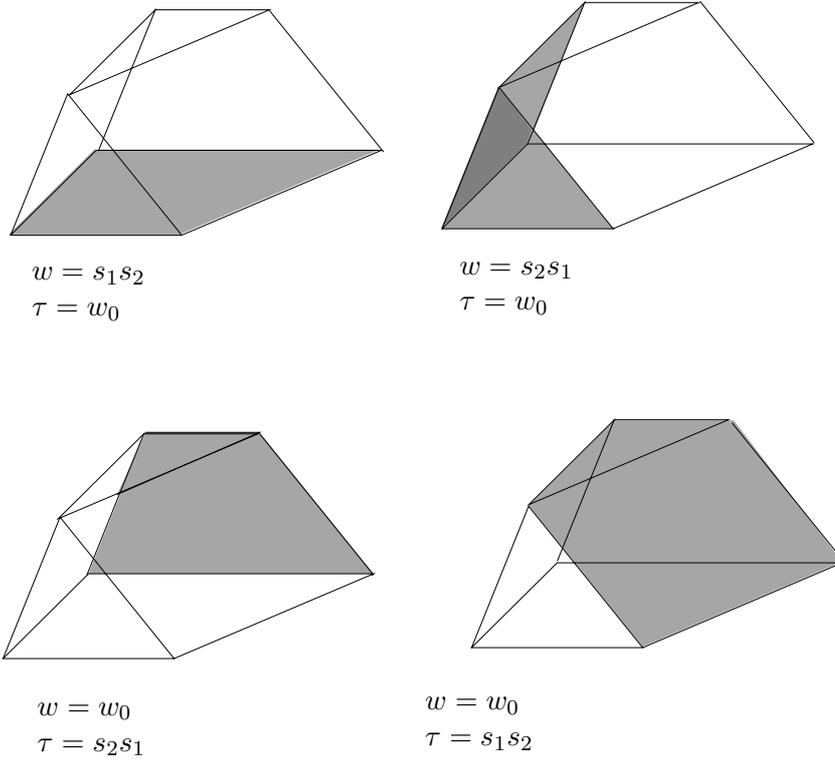
Les variétés de Richardson de dimension 1 sont  $X_{s_1}, X_{s_2}, X^{s_1}, X^{s_2}, X_{s_1s_2}^{s_1s_2}, X_{s_1s_2}^{s_2s_1}, X_{s_2s_1}^{s_1s_2}, X_{s_2s_1}^{s_2s_1}$ , et correspondent respectivement aux arêtes [AB], [AD], [CF], [EF], [BC], [CD], [DE], [EG]  $\cup$  [BG]. Le point G correspond à l'intersection des deux composantes irréductibles de la dégénérescence de la variété  $X_{s_2s_1}^{s_2s_1}$ . Il y a aussi deux arêtes supplémentaires, à savoir [AG] et [FG], qui seront interprétées comme les intersections de composantes irréductibles dans les dégénérescences de variété de Richardson de dimension 2.

Les variétés de Richardson de dimension 2 sont  $X_{s_1s_2}, X_{s_2s_1}, X^{s_2s_1}, X^{s_1s_2}$  et correspondent aux faces noircies sur la figure 4.13.

L'arête [AG] correspond à l'intersection des composantes irréductibles de  $X_{s_2s_1}$ , et l'arête [FG] correspond à l'intersection des composantes irréductibles de  $X^{s_1s_2}$ .

#### 4.2.7 Exemples dans le cas $B_2$

Dans le cas  $B_2$  deux mots réduits possibles pour  $w_0$ , à savoir  $\mathbf{i} = (1, 2, 1, 2)$  et  $\mathbf{i}' = (2, 1, 2, 1)$ . Il n'y a pas d'automorphisme de diagramme non-trivial, d'où  $\mathbf{i}^* = \mathbf{i}$  et  $\mathbf{i}'^* = \mathbf{i}'$ . On utilise le mot  $\mathbf{i}$ . A l'aide de [25, §4], on obtient les

FIG. 4.13 – Faces  $\mathcal{C}_i^{w,\tau}(\lambda_0)$  dans le polytope  $\mathcal{C}_i(\lambda_0)$ 

équations du cône  $\mathcal{C}_i$  dans  $Z_{\geq 0}^4$  :

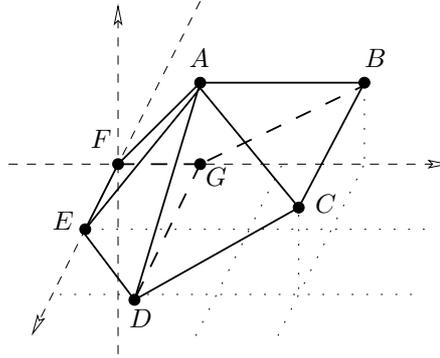
$$\mathcal{C}_i : \begin{cases} t_1 \geq 0 & (\Phi_1) \\ t_2 - t_3 \geq 0 & (\Phi_2) \\ t_3 - t_4 \geq 0 & (\Phi_3) \\ t_4 \geq 0 & (\Phi_4) \end{cases}$$

Fixons un poids dominant  $\lambda_0 = \varpi_1 + \varpi_2$ . Par [25, §1] le polytope  $\mathcal{C}_i(\lambda_0)$  est l'intersection du cône  $\mathcal{C}_i$  et du cône affine ayant pour équations :

$$\begin{cases} t_1 - t_2 + 2t_3 - t_4 \leq 1 & (\tilde{\Phi}_1) \\ t_2 - 2t_3 + 2t_4 \leq 1 & (\tilde{\Phi}_2) \\ t_3 - t_4 \leq 1 & (\tilde{\Phi}_3) \\ t_4 \leq 1 & (\tilde{\Phi}_4) \end{cases}$$

Notons  $\Phi_i$ , resp.  $\tilde{\Phi}_i$ , la face du polytope  $\mathcal{C}_i(\lambda_0)$  déterminée par l'inégalité  $(\Phi_i)$ , resp.  $(\tilde{\Phi}_i)$ .

La variété de drapeaux  $G/B$  dégénère en la variété torique associée au polytope  $\mathcal{C}_i(\lambda_0)$ . Les sous-variétés  $X_w^\tau$  dégénèrent en variétés toriques ou semi-toriques qui sont associées à des faces ou union de faces de ce polytope. On en décrit quelques unes.

FIG. 4.14 – Dégénérescence de  $X_{s_1 s_2 s_1}$ 

La variété  $X_{s_1 s_2 s_1}$  est associée à la face  $\Phi_4$ . C'est un polytope de dimension 3, dont les sommets sont  $\{(0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 3, 1, 0), (2, 1, 0, 0), (2, 3, 1, 0), (0, 1, 1, 0)\}$ . Il est représenté figure 4.14. La variété  $X^{s_1 s_2 s_1}$  est associée aux faces  $\tilde{\Phi}_2 \cup \tilde{\Phi}_4$ . Et la variété  $X_{s_1 s_2 s_1}^{s_1 s_2 s_1}$  est associée à la face  $\Phi_4 \cap \tilde{\Phi}_2$ . C'est un polytope de dimension 2, dont les sommets sont  $\{(0, 1, 0, 0), (2, 1, 0, 0), (2, 3, 1, 0), (0, 3, 1, 0)\}$  (c'est la face BCDG de la figure 4.14).

La variété  $X_{s_1 s_2}$  est associée à la face  $\Phi_3 \cap \Phi_4$ . C'est un polytope plan dont les sommets sont  $\{(0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (2, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0)\}$  (face DEFG de la figure 4.14). Dans ce cas la dégénérescence est triviale (l'éventail est le même que celui de la variété torique  $X_{s_2 s_1}$  de type  $\mathcal{C}_2$ ). La variété  $X^{s_1 s_2}$  est associée à la face  $\tilde{\Phi}_2 \cap \tilde{\Phi}_3$ . C'est un polytope plan dont les sommets sont  $\{(1, 3, 2, 1), (2, 3, 1, 0), (0, 3, 1, 0), (0, 3, 2, 1)\}$ .

## Chapitre 5

# Réalisation des cônes de Lusztig

Ce chapitre est un large résumé de l'article *Realisation of Lusztig cone*, écrit en collaboration avec Philippe Caldero et Robert Marsh. Pour plus de précisions ou pour le détail des preuves voir [10].

La première partie introduit les cônes de Lusztig. La deuxième partie introduit la notion d'algèbre adaptée et présente des algèbres adaptées dites standard et standard tordues. Une algèbre adaptée a pour base une partie de la base canonique. Dans la troisième partie, on calcule les paramètres en cordes des éléments de la base d'une algèbre adaptée standard tordue par l'involution de Schützenberger. Ces calculs utilisent les résultats obtenus au chapitre 3. On montre alors que l'ensemble de ces paramètres est un cône de Lusztig. On obtient ainsi des générateurs explicites pour les cônes de Lusztig, on en déduit que ces cônes sont simpliciaux.

### 5.1 Cônes de Lusztig ; $\mathcal{L}_i$

#### 5.1.1 Monômes serrés

En général, il n'y a pas de manière simple d'exprimer les éléments de la base canonique  $\mathcal{B}$  en termes des générateurs naturels  $F_1, F_2, \dots, F_n$  de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}^-)$ . Dans de rares cas on a des expressions simples ; cas  $A_1, A_2$  [26],  $A_3$  [39],  $B_2$  [40]. Les calculs s'avèrent extrêmement compliqués en général. Cependant, certains éléments de  $\mathcal{B}$  sont des monômes en  $F_1, F_2, \dots, F_n$ .

Fixons un mot réduit  $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_N)$  de  $w_0$ . Soit  $(t_1, t_2, \dots, t_N) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$ , le monôme :

$$F_{i_1}^{(t_1)} F_{i_2}^{(t_2)} \dots F_{i_N}^{(t_N)}$$

est dit *serré*, si c'est un élément de la base canonique  $\mathcal{B}$ . Dans [28], Lusztig donne une méthode qui permet de construire des monômes serrés. A chaque mot réduit  $\mathbf{i}$ , il introduit un cône  $\mathcal{L}_i \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$  et montre que, dans les cas  $A_1, A_2, A_3$ , le monôme  $F_{i_1}^{(t_1)} F_{i_2}^{(t_2)} \dots F_{i_N}^{(t_N)}$  est serré pour tout  $(t_1, t_2, \dots, t_N) \in \mathcal{L}_i$ . Cette condition est également suffisante en type  $A_4$  [31] et en type  $B_2$  [40], en revanche elle ne l'est plus en type  $A_5$  [35].

### 5.1.2 Définition du cône de Lusztig

Soit  $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_N)$  un mot réduit de  $w_0$ . Le cône de Lusztig  $\mathcal{L}_{\mathbf{i}}$  est le sous-ensemble de  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^N$  des éléments  $(t_1, t_2, \dots, t_N)$  satisfaisant : pour toute paire d'indices  $p < p'$  dans  $\{1, \dots, N\}$  telle que  $i_p = i_{p'} = i$  et  $i_q \neq i$  pour tout  $p < q < p'$  :

$$t_p + t_{p'} + \sum_{p < q < p'} a_{i_p, i_q} t_q \leq 0.$$

**Exemple 5.1.1.** Dans le cas  $A_2$ , si  $\mathbf{i} = (1, 2, 1)$ , le cône  $\mathcal{L}_{121}$  est défini par l'équation :

$$t_1 - t_2 + t_3 \leq 0$$

Effectivement, dans ce cas si  $t_1 - t_2 + t_3 \leq 0$  on a bien  $F_1^{(t_1)} F_2^{(t_2)} F_1^{(t_3)} \in \mathcal{B}$  (voir 2.17 pour la description de  $\mathcal{B}$ ).

## 5.2 Algèbres adaptées ; $A_{\mathbf{i}}$

### 5.2.1 Contexte

Les algèbres adaptées ont été introduites dans [8] en vue de répondre à la conjecture suivante, formulée par Berenstein et Zelevinsky : deux éléments de la base canonique duale  $\mathcal{B}^* \subset \mathcal{U}_q(\mathfrak{n})$   $q$ -commutent si et seulement si ils sont multiplicatifs (*i.e.* leur produit est encore un élément de  $\mathcal{B}^*$  à une puissance de  $q$  près). A tout mot réduit  $\mathbf{i}$ , il est associé une algèbre  $A_{\mathbf{i}}$  engendrée par une partie de  $\mathcal{B}^*$  constituée d'éléments multiplicatifs deux à deux. Ces algèbres sont dites adaptées.

Dans [10], la notion d'algèbre adaptée est transcrite sur l'algèbre  $\mathcal{R}^+ = \bigoplus_{\lambda \in P^+} V_q(\lambda)^* \otimes v_{\lambda}$  qui on le sait, est compatible avec la base canonique duale.

**Définition 5.2.1.** Une sous-algèbre  $A$  de  $\mathcal{R}^+$  est dite adaptée si :

- 1) l'intersection de  $A$  et de la base canonique duale de  $\mathcal{R}^+$  est une base de  $A$ , appelée alors *base adaptée*,
- 2) les éléments de la base sont multiplicatifs deux à deux.

Afin d'alléger certaines notations, dans la suite de ce chapitre on considérera les algèbres dans la spécialisation  $q = 1$ .

### 5.2.2 Algèbres adaptées standard

On considère l'algèbre  $R^+ = \bigoplus_{\lambda \in P^+} V(\lambda)^*$  et sa base canonique duale  $\mathbf{B}^* := \{\xi_{\lambda}(b^*), b \in \mathcal{B}(\lambda), \lambda \in P^+\}$ , voir §2.5.

Soit  $\mathbf{i}$  un mot réduit. On définit les paramètres en cordes, resp. paramètres de Lusztig, des éléments de  $\mathbf{B}^*$  en posant naturellement :

$$c_{\mathbf{i}}(\xi_{\lambda}(b^*)) = c_{\mathbf{i}}(b), \quad \text{resp.} \quad b_{\mathbf{i}}^{-1}(\xi_{\lambda}(b^*)) = b_{\mathbf{i}}^{-1}(b)$$

On note  $b_{w,\lambda}$  l'unique élément de  $\mathcal{B}(\lambda)$  de poids  $\lambda - w(\lambda)$  et on note  $b_{w,\lambda}^*$  pour  $\xi_\lambda(b_{w,\lambda}^*)$ .

Posons, pour tout  $1 \leq i \leq n$  :

$$y_i := b_{id, \varpi_i}^*$$

Soit  $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_N)$  un mot réduit, posons pour tout  $1 \leq k \leq N$  :

$$c_k^{\mathbf{i}} := b_{s_{i_1} \dots s_{i_k}, \varpi_{i_k}}^*$$

Pour tout mot réduit  $\mathbf{i}$ , on désigne par  $A_{\mathbf{i}}$  la sous-algèbre de  $R^+$  engendrée par  $\{y_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{c_k^{\mathbf{i}}, 1 \leq k \leq N\}$ . Alors,

**Proposition 5.2.2.** [9], [10] *L'algèbre  $A_{\mathbf{i}}$  est une sous-algèbre adaptée de  $R^+$  et sa base adaptée est donnée par les monômes en  $y_i$  et  $c_k^{\mathbf{i}}$ .*

L'algèbre  $A_{\mathbf{i}}$  est appelée algèbre adaptée standard. On va effectuer une double torsion sur cette algèbre.

Soit  $\sigma$  l'antiautomorphisme de  $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$  défini sur les générateurs par :  $\sigma(F_i) = F_i, \forall 1 \leq i \leq n$ . On sait que  $\sigma$  préserve la base canonique  $\mathcal{B}$ . Notons  $\mu_k$  le plus petit poids sur de  $P^+$  tel que  $\sigma(b_{s_{i_1} \dots s_{i_k}, \varpi_{i_k}}) \in \mathcal{B}(\mu_k)$ . On pose :

$$c_k^{\mathbf{i}\sigma} := \xi_{\mu_k}(\sigma(b_{s_{i_1} \dots s_{i_k}, \varpi_{i_k}})^*)$$

Pour tout mot réduit  $\mathbf{i}$ , on désigne par  $A_{\mathbf{i}}^\sigma$  la sous-algèbre de  $R^+$  engendrée par  $\{y_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{c_k^{\mathbf{i}\sigma}, 1 \leq k \leq N\}$ . Alors,

**Proposition 5.2.3.** [9], [10] *Soit  $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_N)$  un mot réduit, on a :*

- (i) *l'algèbre  $A_{\mathbf{i}}^\sigma$  est une sous-algèbre adaptée de  $R^+$ ,*
- (ii) *sa base adaptée est donnée par les monômes en  $y_i$  et  $c_k^{\mathbf{i}\sigma}$ ,*
- (iii) *pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,  $b_{\mathbf{i}}^{-1}(y_i) = (0, 0, \dots, 0)$ ,*
- (iv) *pour tout  $1 \leq k \leq N$ ,  $b_{\mathbf{i}}^{-1}(c_k^{\mathbf{i}\sigma}) = (\delta_{i_l, i_k})_{l \leq k} \times \{0\}^{N-k}$ .*

Enfin, on introduit l'application linéaire  $\phi : R^+ \rightarrow R^+$  définie sur la base par :

$$\phi(\xi_\lambda(b^*)) = \xi_{\lambda^*}(\phi_\lambda(b)^*)$$

où  $\phi_\lambda : V(\lambda) \rightarrow V(\lambda^*)$  est l'application linéaire introduite en (3.14). Rappelons que cette application envoie la base  $\mathcal{B}(\lambda)$  en  $\mathcal{B}(\lambda^*)$  et envoie le vecteur de plus haut poids sur le vecteur de plus bas poids. Par abus de notation, on note encore  $\phi_\lambda$  la restriction de  $\phi$  à  $V(\lambda)^*$ .

On s'intéresse à l'image de  $A_{\mathbf{i}}^\sigma$  par  $\phi$ .

**Proposition 5.2.4.** [10] *Soit  $\mathbf{i}$  un mot réduit,  $\phi(A_{\mathbf{i}}^\sigma)$  est une sous-algèbre adaptée de  $R^+$  et sa base adaptée est donnée par les monômes en  $\phi(y_i)$  et  $\phi(c_k^{\mathbf{i}\sigma})$ .*

### 5.3 Réalisation $\mathcal{L}_i = c_i \phi(A_i^\sigma)$

A partir de maintenant on fixe un mot réduit  $\mathbf{i}$ .

#### 5.3.1 Paramètres de $c_i \phi(A_i^\sigma)$

Par abus de notation, on désigne par  $c_i \phi(A_i^\sigma)$  l'ensemble des paramètres en cordes des éléments de la base adaptée de  $\phi(A_i^\sigma)$ . Les éléments de la base adaptée étant multiplicatifs, ils satisfont  $c_i(b^*b^*) = c_i(b^*) + c_i(b^*)$ , comme application de la règle de Leibniz. Donc d'après la proposition ci-dessus l'ensemble  $c_i \phi(A_i^\sigma)$  est engendré par les  $c_i \phi(y_i)$  et les  $c_i \phi(c_k^{\mathbf{i}\sigma})$ .

Les paramètres  $c_i \phi(y_i)$  se calculent facilement en utilisant la proposition 5.2.3 (iii) et les formules (2.8). En effet, par 5.2.3 (iii),  $y_i$  est le vecteur de plus haut poids dans  $\mathcal{B}(\varpi_i)$ ,  $\phi(y_i)$  est celui de plus bas poids dans  $\mathcal{B}(\varpi_i^*)$  et donc d'après (2.8) ses paramètres en cordes sont :

$$c_i \phi(y_i) = \left( \langle \varpi_i, s_{i_1} \cdots s_{i_{j-1}}(\alpha_{i_j}^\vee) \rangle \right)_{1 \leq j \leq N}$$

Le calcul des paramètres  $c_i \phi(c_k^{\mathbf{i}\sigma})$  est plus subtil. Il faut tout d'abord, connaître les poids  $\mu_k$ . Ceux-ci sont calculés dans [10], d'après une formule due à [20] et valent :

$$\mu_k = \sum_{1 \leq l \leq n, \langle s_{i_1} \cdots s_{i_k} \varpi_{i_k}, \alpha_l^\vee \rangle \leq 0} -\langle s_{i_1} \cdots s_{i_k} \varpi_{i_k}, \alpha_l^\vee \rangle \varpi_l.$$

Ensuite on calcule  $c_i \phi(c_k^{\mathbf{i}\sigma}) = c_i \phi_{\mu_k}(c_k^{\mathbf{i}\sigma})$  en utilisant la formule pour  $c_i \phi_{\mu_k} b_i$  calculée en (3.20), et la valeur de  $b_i^{-1}(c_k^{\mathbf{i}\sigma})$  donnée dans la proposition 5.2.3 (iv). On présente le résultat sous forme matricielle (on ne fait pas figurer les calculs, ceux-ci se trouvent dans [10] avec les mêmes notations) :

- on stocke les paramètres de Lusztig des éléments  $c_k^{\mathbf{i}\sigma}$ ,  $1 \leq k \leq N$  dans les colonnes d'une matrice  $V$  de taille  $N \times N$  :

$$V_{jk} = \begin{cases} 1 & j \leq k, \text{ si } i_j = i_k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- on note  $T$  la matrice de la partie linéaire de l'application  $c_i \phi_{\mu_k} b_i$  calculée en (3.20) (on rappelle que cette partie linéaire ne dépend pas de  $\mu_k$  :

$$T_{jk} = \begin{cases} -1 & j = k, \\ \langle s_{i_{j+1}} \cdots s_{i_{k-1}} \alpha_{i_k}, \alpha_{i_j}^\vee \rangle & j < k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- on stocke les coordonnées  $c_i(\phi_{\mu_k}(v_{\mu_k}))$ ,  $1 \leq k \leq N$  dans les colonnes d'une matrice  $P$  (une colonne correspond ainsi à la partie affine de l'application  $c_i \phi_{\mu_k} b_i$ ) :

$$P_{jk} = \sum_{1 \leq l \leq n, \langle s_{i_1} \cdots s_{i_k} \varpi_{i_k}, \alpha_l^\vee \rangle \leq 0} -\langle s_{i_1} \cdots s_{i_k} \varpi_{i_k}, \alpha_l^\vee \rangle \langle s_{i_{j-1}} \cdots s_{i_1} \varpi_l, \alpha_{i_j}^\vee \rangle.$$

Ainsi,  $c_{\mathbf{i}}\phi(c_k^{\mathbf{i}\sigma})$  est la  $k$ -ième colonne de  $TV + P$ .

Le produit  $TV$  a une expression simple ;  $TV = -C$  où  $C$  est la matrice :

$$C_{jk} = \begin{cases} \langle s_{i_{j+1}} \cdots s_{i_k} \varpi_{i_k}, \alpha_{i_j}^{\vee} \rangle & j \leq k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par conséquent, on a :

**Proposition 5.3.1.** [10] *L'ensemble  $c_{\mathbf{i}}\phi(A_{\mathbf{i}}^{\sigma})$  est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients positifs des vecteurs colonnes de la matrice  $-C+P$  ainsi que des vecteurs  $c_{\mathbf{i}}\phi(y_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ .*

En fait on montre que  $n$  colonnes de  $-C + P$  sont nulles. On les remplace chacune par un vecteur  $c_{\mathbf{i}}\phi(y_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Plus précisément on introduit la notation suivante : soit  $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ , on note  $k(1) = \min\{j : j > k, i_j = i_k\}$ , i.e.  $k(1)$  désigne la première occurrence de  $i_k$  à la droite de  $i_k$  dans  $\mathbf{i}$ . S'il n'y a pas de telle occurrence on pose  $k(1) = N + 1$ .

**Proposition 5.3.2.** [10] *Soit  $k \in \{1, 2, \dots, N\}$  tel que  $k(1) = N + 1$ . Alors pour tout  $j = 1, 2, \dots, N$ , on a  $P_{jk} = C_{jk}$ , i.e. la  $k$ -ième colonne de  $P$  coïncide avec la  $k$ -ième colonne de  $C$ .*

On définit une nouvelle matrice  $X = (X_{jk}) \in M_N(\mathbb{Z})$  par :

$$X_{jk} = \begin{cases} \langle \varpi_{i_k}, s_{i_1} \cdots s_{i_{j-1}}(\alpha_{i_j}^{\vee}) \rangle, & k(1) = N + 1, \\ -C_{jk} + P_{jk}, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.1)$$

Il est clair que pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , il existe un et un seul  $k \in \{1, 2, \dots, N\}$  tel que  $k(1) = N + 1$  ( $k$  est la dernière occurrence de  $i$  dans  $\mathbf{i}$ ). La matrice  $X$  est donc la matrice  $-C + P$  dans laquelle on a remplacé les  $n$ -colonnes nulles correspondant à un  $k$  tel que  $k(1) = N + 1$ , par les  $n$  colonnes des coordonnées  $c_{\mathbf{i}}\phi(y_{i_k})$ .

On peut donc reformuler la proposition 5.3.1 :

**Proposition 5.3.3.** [10] *L'ensemble  $c_{\mathbf{i}}\phi(A_{\mathbf{i}}^{\sigma})$  est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients positifs des vecteurs colonnes de la matrice  $X$ . En particulier  $X$  est une matrice à coefficients entiers positifs.*

### 5.3.2 Générateurs de $\mathcal{L}_{\mathbf{i}}$

On définit la matrice  $L = (L_{jk}) \in M_N(\mathbb{Z})$  en posant :

$$L_{jk} = \begin{cases} -1 & k = j \text{ ou } k = j(1), \\ -a_{i_j, i_k} & j < k < j(1), \\ 1 & j(1) = N + 1, \quad s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k}) = \alpha_{i_j}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Vu les définitions, le lemme suivant est immédiat :

**Lemme 5.3.4.** [10] Soit  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$ . Notons  $\mathbf{r}_j$  la  $j$ -ième ligne de  $L$  et  $\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{t}$  le produit scalaire entre  $\mathbf{r}_j$  et  $\mathbf{t}$ . Alors,

- (i) l'ensemble  $\{\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{t} \geq 0, j \in \{1, 2, \dots, N\}, j(1) \leq N\}$  est l'ensemble des inégalités définissant  $\mathcal{L}_i$ ,
- (ii) pour  $j \in \{1, 2, \dots, N\}$  tel que  $j(1) = N+1$ , l'inégalité  $\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{t} \geq 0$  est simplement l'inégalité  $t_k \geq 0$  pour l'unique  $k$  tel que  $s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k}) = \alpha_{i_j}$

Soit  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{Z}^N$ , on note  $\mathbf{t} \geq 0$  si on a  $t_k \geq 0$  pour tout  $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ . D'après le lemme ci-dessus, il est clair que :

$$\mathcal{L}_i = \{\mathbf{t} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N / L\mathbf{t} \geq 0\} \quad (5.2)$$

La proposition cruciale pour ce qui suit, est :

**Proposition 5.3.5.** [10] Soit  $L$  et  $X$  les matrices définies ci-dessus,

$$LX = I$$

où  $I$  est la matrice identité.

On a donc  $\mathbf{t}' = L\mathbf{t}$  équivalent à  $\mathbf{t} = X\mathbf{t}'$  et donc :

$$L\mathbf{t} \geq 0 \iff \mathbf{t} = \text{une combinaison linéaire à coefficients positifs des vecteurs colonnes de la matrice } X$$

D'où le corollaire suivant :

**Corollaire 5.3.6.** [10] Soit  $\mathbf{i}$  un mot réduit. Soit  $\mathcal{L}_i$  le cône de Lusztig associé à  $\mathbf{i}$  et  $\phi(A_{\mathbf{i}}^\sigma)$  l'algèbre adaptée standard tordue associée à  $\mathbf{i}$ . Soit  $X$  la matrice associée à  $\mathbf{i}$  définie en (5.1). Alors,

- (i) le cône  $\mathcal{L}_i$  est engendré par les combinaisons linéaires à coefficients entiers positifs des vecteurs colonne de la matrice  $X$ ,
- (ii) en particulier  $\mathcal{L}_i$  est simplicial,
- (iii) on a  $\mathcal{L}_i = c_i \phi(A_{\mathbf{i}}^\sigma)$ .

# Annexe A

## Formulaire

### A.1 Applications $\tilde{R}_i^{\prime}$

Ces applications sont définies §3.2.3.

Les formules suivantes ont été calculées dans [3].

(1) Type  $A_1 \times A_1$  :  $i = 12$ ,  $i' = 21$ ,  $(p_1, p_2) = \tilde{R}_i^{\prime}(t_1, t_2)$ ,

$$p_1 = t_2, \quad p_2 = t_1 .$$

(2) Type  $A_2$  :  $i = 121$ ,  $i' = 212$ ,  $(p_1, p_2, p_3) = \tilde{R}_i^{\prime}(t_1, t_2, t_3)$ ,

$$p_1 = \frac{t_2 t_3}{t_1 + t_3}, \quad p_2 = t_1 + t_3, \quad p_3 = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_3} .$$

(3) Type  $B_2$  :  $i = 1212$ ,  $i' = 2121$ ,  $(p_1, p_2, p_3, p_4) = \tilde{R}_i^{\prime}(t_1, t_2, t_3, t_4)$ ,

$$p_1 = \frac{t_2 t_3^2 t_4}{\pi_2}, \quad p_2 = \frac{\pi_2}{\pi_1}, \quad p_3 = \frac{\pi_1^2}{\pi_2}, \quad p_4 = \frac{t_1 t_2 t_3}{\pi_1} ,$$

où

$$\pi_1 = t_1 t_2 + (t_1 + t_3) t_4, \quad \pi_2 = t_1^2 t_2 + (t_1 + t_3)^2 t_4 .$$

(4) Type  $G_2$  :  $i = 121212$ ,  $i' = 212121$ ,  $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6) = \tilde{R}_i^{\prime}(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6)$ ,

$$p_1 = \frac{t_2 t_3^3 t_4^2 t_5^3 t_6}{\pi_3}, \quad p_2 = \frac{\pi_3}{\pi_2}, \quad p_3 = \frac{\pi_2^3}{\pi_3 \pi_4},$$
$$p_4 = \frac{\pi_4}{\pi_1 \pi_2}, \quad p_5 = \frac{\pi_1^3}{\pi_4}, \quad p_6 = \frac{t_1 t_2 t_3^2 t_4 t_5}{\pi_1} ,$$

où

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= t_1 t_2 t_3^2 t_4 + t_1 t_2 (t_3 + t_5)^2 t_6 + (t_1 + t_3) t_4 t_5^2 t_6, \\
\pi_2 &= t_1^2 t_2^2 t_3^3 t_4 + t_1^2 t_2^2 (t_3 + t_5)^3 t_6 + (t_1 + t_3)^2 t_4^2 t_5^3 t_6 \\
&\quad + t_1 t_2 t_4 t_5^2 t_6 (3t_1 t_3 + 2t_3^2 + 2t_3 t_5 + 2t_1 t_5), \\
\pi_3 &= t_1^3 t_2^2 t_3^3 t_4 + t_1^3 t_2^2 (t_3 + t_5)^3 t_6 + (t_1 + t_3)^3 t_4^2 t_5^3 t_6 \\
&\quad + t_1^2 t_2 t_4 t_5^2 t_6 (3t_1 t_3 + 3t_3^2 + 3t_3 t_5 + 2t_1 t_5), \\
\pi_4 &= t_1^2 t_2^2 t_3^3 t_4 (t_1 t_2 t_3^3 t_4 + 2t_1 t_2 (t_3 + t_5)^3 t_6 + (3t_1 t_3 + 3t_3^2 + 3t_3 t_5 + 2t_1 t_5) t_4 t_5^2 t_6) \\
&\quad + t_6^2 (t_1 t_2 (t_3 + t_5)^2 + (t_1 + t_3) t_4 t_5^2)^3.
\end{aligned}$$

On peut également donner une formule en type  $\mathbb{C}_2$  (utile car le type  $\mathbb{C}_2$  est le dual de Langlands du type  $\mathbb{B}_2$ ) :

$$(5) \text{ Type } C_2 : \mathbf{i} = 1212, \mathbf{i}' = 2121, (p_1, p_2, p_3, p_4) = \tilde{R}_1^{\mathbf{i}'}(t_1, t_2, t_3, t_4),$$

$$p_1 = \frac{t_2 t_3 t_4}{\pi_1}, \quad p_2 = \frac{\pi_1^2}{\pi_2}, \quad p_3 = \frac{\pi_2}{\pi_1}, \quad p_4 = \frac{t_1 t_2^2 t_3}{\pi_2},$$

où

$$\pi_1 = t_1 t_2 + (t_1 + t_3) t_4, \quad \pi_2 = t_3 t_4^2 + (t_2 + t_4)^2 t_1.$$

## A.2 Applications $R_i^{\mathbf{i}'}$

On peut déduire les formules suivantes du théorème 3.2.2 et A.1.

$$(1) \text{ Type } A_1 \times A_1 : \mathbf{i} = 12, \mathbf{i}' = 21, (p_1, p_2) = R_1^{\mathbf{i}'}(t_1, t_2),$$

$$p_1 = t_2, \quad p_2 = t_1.$$

$$(2) \text{ Type } A_2 : \mathbf{i} = 121, \mathbf{i}' = 212, (p_1, p_2, p_3) = R_1^{\mathbf{i}'}(t_1, t_2, t_3),$$

$$p_1 = t_2 + t_3 - \min(t_1, t_3), \quad p_2 = \min(t_1, t_3), \quad p_3 = t_1 + t_2 - \min(t_1, t_3).$$

$$(3) \text{ Type } B_2 : \mathbf{i} = 1212, \mathbf{i}' = 2121, (p_1, p_2, p_3, p_4) = \tilde{R}_1^{\mathbf{i}'}(t_1, t_2, t_3, t_4),$$

$$p_1 = t_2 + t_3 + t_4 - \min(t_1 + t_2, t_1 + t_4, t_3 + t_4),$$

$$p_2 = 2 \min(t_1 + t_2, t_1 + t_4, t_3 + t_4) - \min(t_3 + 2t_4, t_1 + 2t_2, t_1 + 2t_4, t_1 + t_2 + t_4),$$

$$p_3 = \min(t_3 + 2t_4, t_1 + 2t_2, t_1 + 2t_4, t_1 + t_2 + t_4) - \min(t_1 + t_2, t_1 + t_4, t_3 + t_4),$$

$$p_4 = t_1 + 2t_2 + t_3 - \min(t_3 + 2t_4, t_1 + 2t_2, t_1 + 2t_4, t_1 + t_2 + t_4),$$

$$(4) \text{ Type } C_2 : \mathbf{i} = 1212, \mathbf{i}' = 2121, (p_1, p_2, p_3, p_4) = \tilde{R}_1^{\mathbf{i}'}(t_1, t_2, t_3, t_4),$$

$$p_1 = t_2 + 2t_3 + t_4 - \min(2t_1 + t_2, 2t_1 + t_4, t_1 + t_2 + t_3, 2t_3 + t_4),$$

$$p_2 = \min(2t_1 + t_2, 2t_1 + t_4, t_1 + t_2 + t_3, 2t_3 + t_4) - \min(t_1 + t_2, t_1 + t_4, t_3 + t_4),$$

$$p_3 = 2 \min(t_1 + t_2, t_1 + t_4, t_3 + t_4) - \min(2t_1 + t_2, 2t_1 + t_4, t_1 + t_2 + t_3, 2t_3 + t_4),$$

$$p_4 = t_1 + t_2 + t_3 - \min(t_1 + t_2, t_1 + t_4, t_3 + t_4)$$

# Bibliographie

- [1] V. ALEXEEV, M. BRION, Toric degenerations of spherical varieties. *Selecta Math. (N.S.)*, **10** (2004), 453–478,
- [2] A. BERENSTEIN, S. FOMIN AND A. ZELEVINSKY, Parametrization of canonical bases and totally positive matrices. *Adv. Math.*, **122** (1996), 49–149.
- [3] A. BERENSTEIN AND A. ZELEVINSKY, Total positivity in Schubert varieties, *Comment. Math. Helv.* **72** (1997), 128–166.
- [4] A. BERENSTEIN, A. ZELEVINSKY, Canonical bases for the quantum group of type  $A_r$ , and piecewise-linear combinatorics. *Duke Math. J.*, **143** (1996), 473–502.
- [5] A. BERENSTEIN AND A. ZELEVINSKY, Tensor product multiplicities, Canonical bases and Totally positive varieties. *Invent. Math.*, **143** (2001), 77–128.
- [6] N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie*. Chap. IV, V, VI. Hermann, 1968.
- [7] P. CALDERO, Toric degenerations of Schubert varieties. *Transf. Groups*, **7** :1 (2002), 51–60.
- [8] P. CALDERO, Adapted algebras for the Berenstein–Zelevinsky conjecture. *Transform. Groups* 8, no. 1, (2003), 37–50.
- [9] P. CALDERO, On the  $q$ -commutations in  $U_q(n)$  at roots of one. *J. Algebra*, **210** (1998), 557–576.
- [10] P. CALDERO, R. MARSH, S. MORIER-GENOUD, Realisation of Lusztig cones. *Represent. Theory* **8** (2004), 458–478.
- [11] R. CHIRIVI, LS Algebras and applications to Schubert varieties, *Transf. Groups* **5** :3, (2000) 245–264.
- [12] D.A.COX, S.KATZ, *Mirror symmetry and algebraic geometry*, *Mathematical Surveys and Monographs*, vol.68, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [13] J. DIXMIER, *Enveloping Algebra*, *Graduate Studies in Math.*, vol.11, American Math. Soc., 1996.
- [14] W. FULTON, J. HARRIS, *Representation Theory, A first course*, *Graduate texts in math.* vol. 129, Springer, 1991.

- 
- [15] W. FULTON, Young Tableaux, London Math. Soc. , Students Texts 35, Cambridge Univ. Press, 1997.
- [16] W. FULTON, Introduction to Toric Varieties, Annals of Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1993.
- [17] N. GONCIULEA, V. LAKSHMIBAI, Degenerations of flag and Schubert varieties to tori varieties. *Transform. Groups* **1** :3 (1996), 215–248.
- [18] J. HUMPHREYS, Introduction to Lie algebras and representation theory. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 9. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1972.
- [19] J. HUMPHREYS, Linear algebraic groups. Graduate Texts in Mathematics, No. 21. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975.
- [20] M. KASHIWARA, On Crystal Bases. *Canad. Math. Soc., Conference Proceed.*, **16** (1995), 155–195.
- [21] M. KASHIWARA, Crystallizing thz  $q$ -analogue of universal enveloping algebras. *Commun. Math. Phys.* **133** (1990), 249–260
- [22] V.LAKSHMIBAI, On tangent spaces to Schubert varieties. *J. Algebra* **230** (2000), 222–244.
- [23] V.LAKSHMIBAI, On tangent spaces to Schubert varieties - II. *J. Algebra* **224** (2000), 167–197.
- [24] C. LENART, On the Combinatorics of Crystal Graphs, I arXiv :math.RT/0509200.
- [25] P. LITTELMANN, Cones, crystals and patterns. *Transformation Groups*, **3** :2 (1998), 145–179.
- [26] G. LUSZTIG, Canonical bases arising from quantized enveloping algebras, *J. Amer. Math. Soc.* **3** (1990), 447–498.
- [27] G. LUSZTIG, Canonical bases arising from quantized enveloping algebras, II, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **102** (1990), 175–201.
- [28] G. LUSZTIG, Tight monomials in quantized enveloping algebras. In : *Quantum deformations of algebras and their representations*, Israel Math. Conf. Proc., **7** (1993), 117–132.
- [29] G. LUSZTIG, Introduction to quantum groups. *Progress in Math.*, **110**, Birkhäuser, 1993.
- [30] G. LUSZTIG, Braid group action and canonical bases. *Adv. Math.*, **122** (1996), 237–261.
- [31] R. J. MARSH, More tight monomials in quantized enveloping algebras. *J. Algebra* **204** (1998), 711–732.
- [32] S. MORIER-GENOUD, Relèvement géométrique de la base canonique et involution de Schützenberger. *C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. I* **337** (2003), 371–374.
- [33] S. MORIER-GENOUD, Geometric lifting of the canonical basis and semi-toric degenerations of Richardson varieties. A paraître dans *Trans. AMS*, math.RT/0504538.

- 
- [34] P. PAPI, Convex orderings in affine root systems. *J. Algebra* **172** (1995), 613–623.
  - [35] M. REINEKE, Monomials in canonical bases of quantum groups and quadratic forms. *J. Pure Appl. Algebra* **157** (2001), 301–309.
  - [36] R.W. RICHARDSON, Intersections of double cosets in algebraic groups. *Indag. Math.*, **3** (1992), 69–77.
  - [37] Y. SAITO, PBW basis of quantized universal enveloping algebras. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **30** (1994), 209–232.
  - [38] M. P. SCHÜTZENBERGER, Promotion des morphismes d'ensembles ordonnés. *Discrete Math.*, **2** (1972), 73–94.
  - [39] N. XI, Canonical basis for type  $A_3$ . *Comm. Algebra* **27** (1999), 5703–5710.
  - [40] N. XI, Canonical basis for type  $B_2$ . *J. Algebra* **214** (1999), 8–21.